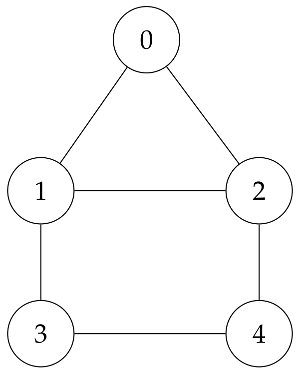
TD 12 – Chaînes de Markov (distributions stationnaires) & Stats

Exercice 1.
On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisit le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisins du sommet courant).



1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.
2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Exercice 2.
On étudie un modèle simple des échanges de molécules de gaz entre deux récipients, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de molécules dans le premier récipient. Soit N le nombre total de molécules dans les deux récipients. L'échange est modélisé de la façon suivante : si le premier récipient contient x molécules à l'instant t, alors à l'instant $t+1$ il contient $x+1$ molécules avec probabilité $\frac{N-x}{N}$ et $x-1$ molécules avec probabilité $\frac{x}{N}$.

1. Décrire ce modèle avec une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition. Pour $N = 3$, dessiner la chaîne de Markov correspondante.
2. Pour $N \in \mathbb{N}$, donner la distribution stationnaire de la chaîne de Markov.
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le premier récipient est vide (et le deuxième récipient contient N molécules). On note $T \leq 1$ le prochain instant où le premier récipient est vide. Calculer $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 3.
Modèle de Poisson
Le modèle de Poisson est l'ensemble $\{\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0\}$. On rappelle que $\mathcal{P}(\lambda)$, pour un certain $\lambda > 0$, correspond a la loi donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_\lambda(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{1}$$

Vocabulaire :

— Un estimateur $\tilde{\lambda}_n$ de λ est *convergent* si pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{\lambda}_n$ converge vers λ en $\mathbb{P}_\lambda$-probabilité, c'est à dire si $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_n \mathbb{P}_\lambda(|\tilde{\lambda}_n - \lambda| \geq \epsilon) = 0 \tag{2}$$

— Le *bias* d'estimateur $\tilde{\lambda}_n$ de λ (tel que $\mathbb{E}_\lambda[\tilde{\lambda}_n] < \infty$) est la fonction $b(\tilde{\lambda}_n, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie comme

$$b(\tilde{\lambda}_n, \lambda) = \mathbb{E}_\lambda[\tilde{\lambda}_n] - \lambda \tag{3}$$

Estimateur moment d'ordre 1

1. Calculer $\mathbb{E}_\lambda[X]$ et déduire un estimateur de moment $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$
2. Quel est le biais de cet estimateur ?
3. Cet estimateur est il consistant ?

Estimateur moment d'ordre 2

1. Calculer un autre estimateur $\tilde{\lambda}_n^{(2)}$ d'après l'expression de $\mathbb{E}_\lambda[X^2]$.
2. Cet estimateur est-il non-biaisé (i.e. $b(\tilde{\lambda}_n^{(2)}, \lambda) = 0$) ?

Estimateur Maximum de Vraisemblance

1. Calculer la vraisemblance du modèle.
2. Calculer l'Estimateur Maximum de Vraisemblance (EMV).

Exercice 4.
Une *k-coloration* d'un graphe est une fonction des sommets du graphe vers un ensemble de k couleurs. On dit qu'elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est dit *k-colorable* s'il possède une k-coloration propre.

Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est *monochromatique* si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

On considère maintenant l'algorithme suivant, dont le but est de trouver une telle 2-coloration :
On commence avec une 2-coloration arbitraire.
Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur.
On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre pour {Rouge, Bleu, Vert} (mais on ne la connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration.
Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?

3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quel·s sont le ou les sommet·s à atteindre pour terminer ?
Pour $j \in \{0, \ldots, n\}$, que peut-on dire de l'état j par rapport à l'état $n - j$?

4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer lorsqu'on part d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1}. Déterminer h_0 et h_n.

5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.

6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$. Conclure.
Indication : *On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$, obtenue par symétrie.*

Exercice 5.
Une tour se déplace sur un échiquier de 8×8 cases uniformément au hasard (depuis la case de coordonnées (x, y), elle peut se déplacer sur une des cases de l'ensemble $\{(x', y) | x' = x\} \cup \{(x, yi) | y' = y\}$). Au bout de combien de déplacements en moyenne revient-elle à la case de départ ?
Même question pour un cavalier qui part d'un coin de l'échiquier.