Lison Blondeau-Patissier & Anne Gagneux

TD 11 – Chaînes de Markov (récurrence et transience)

Exercice 1. *Propositions utiles*

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j, alors j est aussi de période d.* » Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

2. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.* »

3. On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i. Une classe $\mathcal{C}$ d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, on a $P_{i,j} = 0$ (où $(P_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrer que :

a. Une classe non close est transitoire.

b. Une classe close **finie** est récurrente.

En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

4. Montrer que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.

Indication : *on pourra montrer d'abord les points suivants :*

— *x est transitoire ssi $\mathbf{E}\left[N_x | X_0 = y\right] < \infty$ pour tout état y,*

— *Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \to 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne).*

Exercice 2. *Examples*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Donner sa représentation graphique.
2. Partitionner les états en composantes irréductibles.
3. Pour chaque état, dire s'il est transient ou récurrent.

4. Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
5. Donner la distribution stationnaire.
6. Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

Exercice 3. *Récurrence et Transience*

1. Soit $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $0 < p < 1$. On considère M_1 la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par :

$$\text{pour } 0 \leq x < n,\ P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et } P(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessiner le graphe associé à M_1. Quels sont ses états récurrents et ses états transients ?

2. Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle corresponde à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

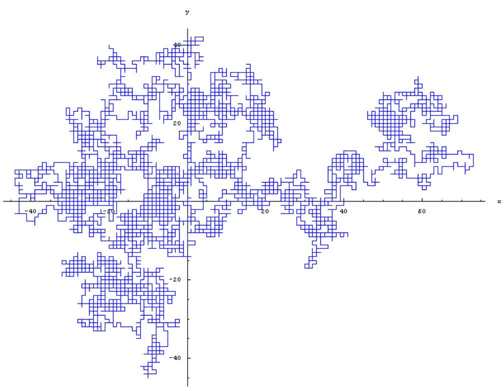
Déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (*i.e.* aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides C_1 et C_2. Calculer, pour $i \in \{1, 2\}$, la probabilité

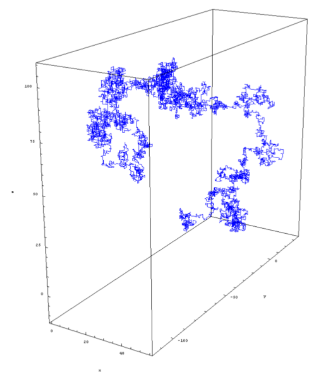
$$\mathbf{P}\left\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\right\}.$$

Exercice 4. *Chaines de Markov*

Considérons la marche aléatoire simple sur $\mathcal{Z}^d$ qui se déplace avec probabilité $1/2d$ vers chacun de ses $2d$ voisins dans ka grille. Cette marche est clairement irréductible.



A random walk in $\mathcal{Z}^2$
(10000 steps, Wikipedia)



A random walk in $\mathcal{Z}^3$
(10000 steps, Wikipedia)

1. Pour $d = 1$, est elle récurrente ? récurrente positive ?

2. Pour $d = 2$, est elle récurrente ? récurrente positive ?

   Indice : considérer une décomposition de la marche en deux marches indépendantes

3. Dans le cas $d = 3$, pour tout n, montrer que

$$\mathbf{P}\left\{S_{2n} = 0\right\} = \sum_{r+s+t=n} \binom{2n}{n} \binom{n}{r,s,t}^2 \frac{1}{6^{2n}},$$

où S_i est l'emplacement de la marche au temps i.

4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} = 0 < \infty$$

et conclure pour le cas $d = 3$.