TD 11 – Chaînes de Markov (récurrence et transience) (corrigé)

Exercice 1. *Propositions utiles*

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j, alors j est aussi de période d.* » Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

☞ Si i et j communiquent, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$.

Puis, notons $R_i = \{k \in \mathbb{N} \mid p_{i,i}^{(k)} > 0\}$ (et de même pour R_j). Par hypothèse, on a $d = \mathrm{PGCD}(R_i)$. Notons $d_j = \mathrm{PGCD}(R_j)$.

Pour tout $k \in R_i$, on a $p_{j,j}^{(m+k+n)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(k)} p_{i,j}^{(n)} > 0$, donc $m+k+n \in R_j$. Mais $k \in R_i \implies 2k \in R_i$, donc on a aussi $m+2k+n \in R_j$. Alors $d_j | m+k+n$ et $d_j | m+2k+n$, donc $d_j | k$. Puisque cela est vrai pour tout $k \in R_i$, on obtient que $d_j | \mathrm{PGCD}(R_i)$.
Symétriquement, on montre que $d | d_j$, donc $d_j = d$.

Un état qui possède une boucle sur lui-même est forcément apériodique car il existe un chemin de lui-même à lui-même de longueur 1.

2. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.* »

☞ Comme i et j communiquent, on a $p_{i,j}^{(n_1)} > 0$ et $p_{j,i}^{(n_2)} > 0$ pour certains entiers n_1 et n_2. On en déduit :

$$\sum_n p_{j,j}^{(n_1+n+n_2)} \geq \sum_n p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(n_1)} = p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,j}^{(n_1)} \sum_n p_{i,i}^{(n)} = +\infty \; .$$

3. On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i. Une classe $\mathcal{C}$ d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, on a $P_{i,j} = 0$ (où $(P_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrer que :
   a. Une classe non close est transitoire.
   b. Une classe close **finie** est récurrente.
   En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

☞ **a.** Soit $\mathcal{C}$ une classe non-close. Il existe donc $i \in \mathcal{C}$ et $j \notin \mathcal{C}$ tels que $p_{i,j} \neq 0$. Or i et j ne communiquent pas car ils ne sont pas dans les mêmes classes, donc i n'est pas accessible depuis j. Donc pour tout n, $\mathbf{P}\{X_n = i | X_1 = j\} = 0$ (où X_n décrit le n-ième état dans une marche sur la chaîne de Markov). Soit T_i le temps d'atteinte de i, alors on déduit de ce qui précède que $\mathbf{P}\{T_i < \infty | X_1 = j\} = 0$. Finalement, $\mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i\} \geq \mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i, X_1 = j\} \mathbf{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} = 1 \cdot p_{i,j} > 0$. Cela prouve que i est transitoire, et donc que $\mathcal{C}$ l'est.
b. On considère maintenant une classe $\mathcal{C}$ close **finie**. Alors pour tout $i \in \mathcal{C}$, si on part de i, la chaîne reste dans $\mathcal{C}$. On note N_j le nombre de passages en l'état j. On a :

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j \in \mathcal{C}} N_j = \infty | X_0 = i\right\} = 1 \; .$$

Or cette somme a un nombre fini de termes, donc on en déduit que $\mathbf{P}\{\exists j \in \mathcal{C}, N_j = \infty | X_0 = i\} = 1$. Si on suppose que tout $j \in \mathcal{C}$ est transitoire, on aboutit à une contradiction, donc tous les j sont récurrents. Ainsi, toute classe finie close est récurrente.

4. Montrer que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.
   Indication : *on pourra montrer d'abord les points suivants :*
   — *x est transitoire ssi $\mathbf{E}[N_x | X_0 = y] < \infty$ pour tout état y,*
   — *Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \to 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne).*

☞ Soit π une loi de probabilité stationnaire et i un état transitoire. π vérifie pour tout n, $\pi p^n = \pi$ donc $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{j,i}^{(n)}$.

Or si i est transitoire, $p_{j,i}^{(n)}$ tend vers 0. En effet, i transitoire ssi $\mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = i\} = 0$ par définition. Or $\mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = i\} \geq \mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = j\}$ pour tout état j (chaîne sans mémoire), d'où $\mathbf{E}[N_i | X_0 = j] < \infty$. Il s'ensuit que $p_{j,i}^{(n)} \to 0$.

On peut inverser série et limite par convergence dominée car $|p_{j,i}^{(n)}| \leq 1$ et $\sum_j \pi_j = 1$; on déduit alors $\pi_i = 0$.

Exercice 2. *Examples*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Donner sa représentation graphique.
2. Partitionner les états en composantes irréductibles.
3. Pour chaque état, dire s'il est transient ou récurrent.
4. Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
5. Donner la distribution stationnaire.
6. Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

☞

A
2. Il y a une composante fortement connexe fermée $C_1 = \{1,3\}$ et une composante fortement connexe non fermée $C_2 = \{2\}$.
3. Pour l'état 1, on a $\sum_{t\geq 1} r_{1,1}^t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2^t} = 1$, donc 1 est récurrent.
   De même, pour 3 a $\sum_{t\geq 1} r_{3,3}^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^t = 1$, donc 3 est récurrent.
   Enfin, l'état 2 est transient.
4. La chaîne est apériodique (car la diagonale de la matrice de transition est non nulle).
5. La distribution stationnaire, *i.e.* l'unique mesure de probabilité invariante, est $\pi = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$.
6. Par le théorème du cours, on a, pour tout x, $\pi(x) = \frac{1}{\mathrm{E}_x(T_x)}$. On obtient $\mathrm{E}_1(T_1) = \frac{5}{2}$, $\mathrm{E}_2(T_2) = \infty$ et $\mathrm{E}_3(T_3) = \frac{5}{3}$.

B
2. Il y a une composante fortement connexe fermée $C_1 = \{4\}$ et une composante fortement connexe non fermée $C_2 = \{1,3,3\}$.
3. L'état 4 est récurrent. Les états 2, 3 et 4 sont transients.
4. L'état 4 est apériodique. Les états 2, 3 et 4 sont périodiques de période 3.
5. On calcule $\pi = (0,0,0,1)$ (et 4 est un état absorbant).
6. On en déduit $\mathrm{E}_4(T_4) = 1$ et $\mathrm{E}_1(T_1) = \mathrm{E}_2(T_2) = \mathrm{E}_3(T_3) = \infty$.

C
2. La chaîne est irréductible : tous les états communiquent.
3. Tous les états sont récurrents.
4. Tous les états sont apériodiques.
5. Le distribution stationnaire est $\pi = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7})$ (on peut la calculer avec un pivot de Gauss).
6. On en déduit $\mathrm{E}_1(T_1) = \frac{7}{2}$, $\mathrm{E}_2(T_2) = 7$ et $\mathrm{E}_3(T_3) = \frac{7}{4}$.

Exercice 3. *Récurrence et Transience*

1. Soit $S = \{0,1,\dots,n\}$ et $0 < p < 1$. On considère M_1 la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par :

$$\text{pour } 0 \leq x < n,\ P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et } \ P(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessiner le graphe associé à M_1. Quels sont ses états récurrents et ses états transients ?

☞ (Faire un dessin au tableau.) On a deux classes d'équivalence (deux sous-chaînes irréductibles) dans cette chaîne. La première contient les états $\{0,1,\dots,n-1\}$ et l'autre l'état n. L'état n est récurrent, car $\mathbf{P}\{T_n < \infty | X_0 = n\} = 1$. Les autres états sont soit tous récurrents, soit tous transients (car ils sont dans la même composante fortement connexe du graphe). Étudions l'état $n-1$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_{n-1} < \infty | X_0 = n-1\} &\leq \mathbf{P}\{X_1 = 0 | X_0 = n-1\} \\ &= 1-p \\ &< 1. \end{aligned}$$

Les états 0 à $n-1$ sont donc transients.

2. Soit $S = \{1,\dots,6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle corresponde à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

Déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

☞ On complète avec

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

(Faire un dessin au tableau.) On voit qu'il y a deux composantes fortement connexes fermées (avec aucune arrête sortante) qui sont $C_1 = \{1,2\}$ et $C_2 = \{3,5\}$. L'ensemble $\{4,6\}$ est aussi fortement connexe mais n'est pas fermé. Si on regroupe ces composantes connexes et qu'on dessine l'arbre associé, l'ensemble $\{4,6\}$ est la racine de l'arbre, et les noeuds C_1 et C_2 sont ses fils et sont des feuilles de l'arbre. On pourrait s'arrêter là : comme le graphe est fini, on sait que les états dans les feuilles sont récurrents et les autres sont transients.
On va quand même faire la démonstration.

- Comme la composante C_1 est fermée et fortement connexe, la chaîne de Markov (X_n) d'état initial 1 ou 2 et de matrice de transition M est la même que la chaîne de Markov de même état initial et de matrice de transition $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, sur l'ensemble d'états $\{1,2\}$. Cette chaîne est irréductible et a un nombre fini d'états, donc ses états sont récurrents.
- On montre de même que les états de C_2 sont récurrents.
- Montrons maintenant que l'état 4 n'est pas récurrent (comme il communique avec 6, cela montrera aussi que 6 est transitoire). On a $\mathbf{P}\{T_x < \infty | X_0 = 4\} \le \mathbf{P}\{X_1 = 6 | X_0 = 4\} < 1$, donc 4 et 6 sont transitoires.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (*i.e.* aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides C_1 et C_2. Calculer, pour $i \in \{1,2\}$, la probabilité

$$\mathbf{P}\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\}.$$

☞ On a déjà défini à la question précédents deux ensembles non vides C_1 et C_2 fermés et irréductibles. Calculons la probabilité que $X_n \in C_1$ à partir d'un certain temps, en partant de 6. Comme C_1 est fermé, une suite qui entre dans C_1 n'en ressortira plus. De même, une telle suite ne peut pas rentrer dans C_2 (sinon elle n'en sortirait plus pour aller dans C_1). Donc une telle suite oscille entre 4 et 6 puis fini par rentrer dans C_1. On partitionne ces suites en fonction de l'instant k du dernier passage en 6 (un tel instant existe car on part de 6). Après ce dernier passage en 6, la suite ira soit directement en 2, soit en 4 puis en 1 ou 2. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{10} \times \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}. \end{aligned}$$

De même, en inversant les rôles de C_1 et C_2 on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{20} \times \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}. \end{aligned}$$

Pour finir le calcul, il faut calculer $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}$. On peut éviter un calcul direct en remarquant que

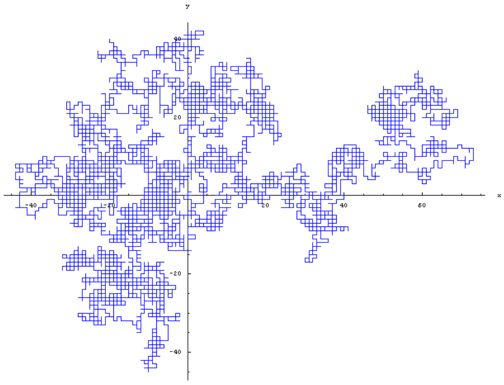
$$\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} + \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 1.$$

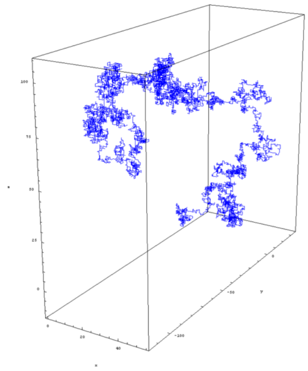
En effet, on sait qu'une suite qui rentre dans C_1 ou C_2 n'en ressort jamais. On a donc trois possibilités, la suite rentre dans C_1, ou bien elle rentre dans C_2, ou bien elle reste tout le temps dans $\{4,6\}$. Mais si $X_n \in \{4,6\}$ pour tout n, alors N_6 ou N_4 est infini (nombre de passage en 4 ou 6). Or, on a vu que 4 et 6 sont transitoires, donc on sait qu'un tel événement arrive avec probabilité 0.
Par conséquent, $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}(3/10 + 5/20) = 1$. On obtient $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} = 20/11$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 6/11 \\ \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 5/11. \end{aligned}$$

Exercice 4. *Chaines de Markov*

Considérons la marche aléatoire simple sur $\mathcal{Z}^d$ qui se déplace avec probabilité $1/2d$ vers chacun de ses $2d$ voisins dans ka grille. Cette marche est clairement irréductible.





A random walk in $\mathcal{Z}^2$ (10000 steps, Wikipedia)

A random walk in $\mathcal{Z}^3$ (10000 steps, Wikipedia)

1. Pour $d = 1$, est elle récurrente ? récurrente positive ?

☞ [Déjà fait dans les TDs précédents]

Soit $(X_n)_n$ la chaîne de Markov associée à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. La chaîne est irréductible, il suffit de montrer que 0 est récurrent. On va utiliser la caractérisation suivante : x est récurrent ssi $\sum_n P^n(x,x) = \infty$.
La chaîne est de période 2 donc $P^{2n+1}(0,0) = 0$.

$$P^{2n}(0,0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \tag{1}$$

(on choisit n étapes vers la droite parmi $2n$, les n restantes sont forcément vers la gauche).
La formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ donne

$$P^{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \tag{2}$$

La série $\sum_n P^{2n}(0,0)$ diverge.
Pour montrer que la chaine de Markov est récurrente nulle, on peut par exemple faire la méthode des coupes (on aurait alors $\pi(n)\frac{1}{2} = \pi(n+1)\frac{1}{2}$ soit π constante, ce qui en sommant sum les n donne $\pi = 0$)

2. Pour $d = 2$, est elle récurrente ? récurrente positive ?
Indice : considérer une décomposition de la marche en deux marches indépendantes
☞

Cas d=2

L'idée est de projeter sur les première et seconde bissectrices de pente ± 1. On change donc de coordonnées. On suppose qu'on était dans la base orthonormée $= (\vec{i}, \vec{j})$ et on fixe deux nouveaux vecteurs :
— $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$
— $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{j} - \vec{i}\right)$
Et on appelle $' = (\vec{u}, \vec{v})$.
Aussi un point de coordonnées (x,y) dans la base a des coordonnées $(i+j, j-i)$ dans la base $'$.
Les 4 mouvements possibles deviennent donc :
— $(+1,0)(+1,-1)$
— $(-1,0)(-1,+1)$
— $(0,+1)(+1,+1)$
— $(0,-1)(-1,-1)$
On obtient donc un produit cartésien de deux variables aléatoires indépendantes. On a donc deux marches aléatoires sur $\mathcal{Z}$ indépendantes. C'est donc une marche aléatoire récurrente.

3. Dans le cas $d = 3$, pour tout n, montrer que

$$\mathbf{P}\{S_{2n} = 0\} = \sum_{r+s+t=n}\binom{2n}{n}\binom{n}{r,s,t}^2\frac{1}{6^{2n}},$$

où S_i est l'emplacement de la marche au temps i.
☞

Cas d=3

Le nombre d'étape pour revenir à l'origine est $2n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de $\mathcal{Z}^3$, de tels chemins doivent aller r fois vers le haut, r fois vers le bas, t fois à gauche, t fois à droite, s fois devant et s fois vers l'arrière et tel que $r+s+t=n$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2n} = 0 &= \sum_{r+s+t=n} \frac{(2n)!}{(r!s!t!)^2} \frac{1}{6^{2n}} \\ &= \sum_{r,s,t} \frac{(2n)!}{(r!s!t!)^2} \frac{(n!)^2}{(n!)^2} \frac{1}{6^{2n}} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{r,s,t} \frac{(n!)^2}{(r!s!t!)^2} \frac{1}{6^{2n}} \end{aligned}$$

4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} = 0 < \infty$$

et conclure pour le cas $d = 3$.

☞

On peut remarquer que pour $n = 3m$, on a

$$\binom{3m}{r,s,t} \leq \binom{3m}{m,m,m} \tag{3}$$

Il suit

$$\begin{aligned} P^{6m}(0,0) &\leq \binom{2n}{n}\binom{3m}{m,m,m}\frac{1}{3^n}\frac{1}{2^{2n}} \sum_{r+s+t=n} \binom{3m}{r,s,t}\frac{1}{3^n} && (4) \\ &= \binom{2n}{n}\binom{3m}{m,m,m}\frac{1}{3^n}\frac{1}{2^{2n}} \underbrace{\sum_{r+s+t=n} \binom{3m}{r,s,t}\frac{1}{3^r}\frac{1}{3^s}\frac{1}{3^t}}_{=(1/3+1/3+1/3)^n=1} && (5) \\ &= \binom{2n}{n}\binom{3m}{m,m,m}\frac{1}{3^n}\frac{1}{2^{2n}} && (6) \\ &\sim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi n}\right)^{3/2} && (7) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$P^{6m}(0,0) = \frac{1}{6}^2 \frac{1}{6}^{6m-2} \sum_{i,j,k=6m} \dots \geq \frac{1}{6}^2 P^{6m-2}(0,0) \tag{8}$$

Comparaison similaire pour $P^{6m-4}(0,0)$

On conclut par

$$\sum_n P^{2n}(0,0) = \sum_m \sum_{k=0,1,2} P^{6m-2k}(0,0) \leq \sum_m C P^{6m}(0,0) < \infty \tag{9}$$