

## TD 11 – Chaînes de Markov (récurrence et transience)

## Exercice 1.

## Propositions utiles

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « si un état  $i$  est périodique de période  $d$  et qu'il communique avec  $j$ , alors  $j$  est aussi de période  $d$ . » Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?
  2. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « la récurrence est une propriété de classe : si  $i$  et  $j$  communiquent et que  $i$  est récurrent, alors  $j$  est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe. »
  3. On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états  $i$  et  $j$  sont dans la même classe si et seulement si  $i$  est accessible depuis  $j$  et  $j$  est accessible depuis  $i$ . Une classe  $\mathcal{C}$  d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout  $i \in \mathcal{C}$  et pour tout  $j \notin \mathcal{C}$ , on a  $P_{i,j} = 0$  (où  $(P_{i,j})_{i,j}$  est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrer que :
    - a. Une classe non close est transitoire.
    - b. Une classe close **finie** est récurrente.
  4. Montrer que si  $\pi$  est une loi de probabilité stationnaire et si  $i$  est un état transitoire, alors  $\pi(i) = 0$ .
- Indication :** on pourra montrer d'abord les points suivants :
- $x$  est transitoiressi  $\mathbf{E}[N_x | X_0 = y] < \infty$  pour tout état  $y$ ,
  - Si  $x$  est transitoire, alors  $(Q^n)_{y,x} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini, pour tout état  $y$  (où  $Q$  est la matrice de transition de la chaîne).

## Exercice 2.

## Examples

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Donner sa représentation graphique.
2. Partitionner les états en composantes irréductibles.
3. Pour chaque état, dire s'il est transients ou récurrents.
4. Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
5. Donner la distribution stationnaire.
6. Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

## Exercice 3.

## Récurrence et Transience

1. Soit  $S = \{0, 1, \dots, n\}$  et  $0 < p < 1$ . On considère  $M_1$  la chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  donnée par :

$$\text{pour } 0 \leq x < n, \quad P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad P(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessiner le graphe associé à  $M_1$ . Quels sont ses états récurrents et ses états transients ?

2. Soit  $S = \{1, \dots, 6\}$ . Compléter la matrice suivante pour qu'elle corresponde à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

Déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

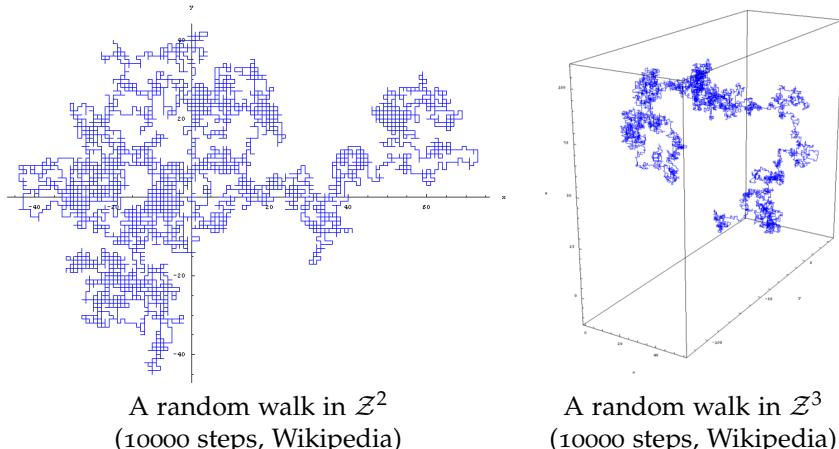
3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (*i.e.* aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides  $C_1$  et  $C_2$ . Calculer, pour  $i \in \{1, 2\}$ , la probabilité

$$\mathbf{P} \{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\}.$$

#### Exercice 4.

Chaines de Markov

Considérons la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$  qui se déplace avec probabilité  $1/2d$  vers chacun de ses  $2d$  voisins dans la grille. Cette marche est clairement irréductible.



1. Pour  $d = 1$ , est elle récurrente ? récurrente positive ?
2. Pour  $d = 2$ , est elle récurrente ? récurrente positive ?  
*Indice : considérer une décomposition de la marche en deux marches indépendantes*
3. Dans le cas  $d = 3$ , pour tout  $n$ , montrer que

$$\mathbf{P} \{S_{2n} = 0\} = \sum_{r+s+t=n} \binom{2n}{n} \binom{n}{r, s, t}^2 \frac{1}{6^{2n}},$$

où  $S_i$  est l'emplacement de la marche au temps  $i$ .

4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} = 0 < \infty$$

et conclure pour le cas  $d = 3$ .