L3 – Probabilités (Année 2025/2026)

Anne Gagneux & Lison Blondeau-Patissier

TD 10 – Chaînes de Markov (corrigé)

Exercice 1. *Prévisions météo*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, alors le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov que l'on représentera à la fois sur sa forme graphique et sous la forme matrice de transition.

   ☞ Voir http://w3.mathinfolmd.univ-tlse2.fr/membres/chabriac/M1process/exopoly2c.pdf.

   L'ensemble des états est $E = \{B, P, N\}$ pour "Beau", "Pluie", Neige". Le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de tout le reste. On a donc bien une chaîne de Markov, dont la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?

☞ Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer P^2.

Ici, seulement la première ligne nous intéresse donc on s'économise les deux autres lignes :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Conclusion : si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie et ou la neige, avec même probabilité.

3. Peut-on supposer maintenant que l'on a deux états, un pour "Beau temps" et un pour "Mauvais Temps" ? Déterminer la nouvelle matrice de transition.

☞ Oui, on peut car les états Pluie et Neige se comportent de la même facon. On a donc maintenant :

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Un exemple détaillé*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{S}$ de matrice de transition P.

Pour tout état y, on note $T_y := \min\{n \mid X_n = y\}$ (avec la convention $\min \emptyset = +\infty$).

Pour tout événement A, on note $\mathbf{P}_x\{A\} := \mathbf{P}\{A | X_0 = x\}$.

Soient x et y deux états distincts, on pose $\rho_{xy} := \mathbf{P}_x\{T_y < +\infty\}$.

Les questions de cet exercice sont simples, le but est de manier les définitions avec des démonstrations détaillées.

1. Montrer que $\rho_{xy} > 0 \iff \exists n \geq 1, P^n(x,y) > 0$.

☞ Intuitivement, $\rho_{xy} > 0$ si et seulement si il existe un chemin de x à y.

Plus formellement, supposons $\rho_{xy} > 0$. On a alors :

$$\rho_{xy} = \mathbf{P}_x\{T_y < \infty\} = \mathbf{P}_x\left\{\bigcup_n T_y = n\right\} = \sum_n \mathbf{P}_x\{T_y = n\}$$

car les événements $T_y = n$ sont disjoints deux à deux.

Il existe donc n tel que $\mathbf{P}_x\{T_y = n\} > 0$.

Or $P^n(x,y) = \mathbf{P}_x\{X_n = y\} \geq \mathbf{P}_x\{T_y = n\}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe n tel que $P^n(x,y) > 0$.

Alors $\rho_{xy} = \mathbf{P}_x\{T_y < \infty\} \geq \mathbf{P}_x\{T_y \leq n\} \geq \mathbf{P}_x\{X_n = y\} > 0$.

On suppose désormais $\rho_{xy} > 0$.

2. Soit $n_0 = \min\{n \geq 1 \mid P^n(x,y) > 0\}$, et $x_1, \dots, x_{n_0-1} \in S$ tels que $P(x,x_1)\dots P(x_{n_0-1},y) > 0$.

Montrer que les états $x = x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}, x_{n_0} = y$ sont distincts.

☞ Intuitivement, n_0 est la taille du plus court chemin de x à y, il ne peut donc pas y avoir de boucle.

Plus formellement, s'il existait $i, j \in \{0, \dots, n_0\}$ tels que $x_i = x_j$ et $i < j$, on aurait :

$$P(x, x_1) \dots P(x_{i-1}, x_i) P(x_j, x_{j+1}) \dots P(x_{n_0-1}, y) \ > \ 0$$

et donc $P^{n_0-(j-i)}(x, y) > 0$, contradiction.

3. Supposons $\mathcal{S}$ fini de cardinal d. Montrer que $n_0 \leq d - 1$.

☞ $x, x_1, \dots, x_{n_0-1}, y$ sont $n_0 + 1$ états distincts, donc $n_0 + 1 \leq d$.

4. Montrer que $\mathbf{P}_x \left\{T_y \leq d - 1\right\} > 0$.

☞ Comme $n_0 \leq d - 1$, on a :

$$\mathbf{P}_x \left\{T_y \leq d - 1\right\} \geq \mathbf{P}_x \left\{T_y \leq n_0\right\} \geq \mathbf{P}_x \left\{T_y = n_0\right\} > 0 \,.$$

Exercice 3. *Suite de 1*

On considère $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$. Fixons $k \in \mathbb{N}$.
On note $p_{k,n}$ la probabilité d'obtenir au moins k 1 consécutifs dans $U_1 \dots U_n$. Comment représenter $p_{k,n}$ en utilisant le formalisme des chaînes de Markov ?

☞ On considère la chaîne de Markov $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = (X_n + 1) \ \mathbf{1}_{U_{n+1}=1} \mathbf{1}_{X_n < k} \ + \ k \ \mathbf{1}_{X_n = k}$ (autrement dit, X représente la longueur de la plus grande suite de 1 consécutifs rencontrée de longueur strictement inférieure à k, et dès qu'on observe une suite de k 1 consécutifs, X est constante égale à k). On a alors $p_{k,n} = \mathbf{P}\{X_n = k\} = P^n(0,k)$, où P est la matrice de transition de X. Elle est donnée par $P(x,0) = 1-p$ si $x < k$, $P(x,x+1) = p$ si $x < k$, $P(k,k) = 1$, et $P(x,y) = 0$ sinon.

Exercice 4. *Chaînes dérivées*

Soit $M_0 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. Pour chacune des M_i définies ci-dessous, on vous demande de dire :

a. Est-ce que M_i est une chaîne de Markov ? On demande une preuve ou un contre-exemple.

b. Si oui, donner la matrice de transition de M_i.

On définit les suites M_i suivantes :

1. Soit $r \in N$. On pose $M_1 = (X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose $M_2 = (X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$, et on pose $M_3 = (2X_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Toujours en supposant $S \subset \mathbb{Z}$, on pose $M_4 = (\lfloor X_n/10 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose $M_5 = (X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On suppose les états de S numérotés avec $S = \{S_1, S_2, \dots\}$. On définit $S' = \{T_{12}, S_3, S_4, \dots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de S par un nouvel état T_{12}). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S \setminus \{S_1, S_2\}$ et $Y_n = T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). On pose $M_6 = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

☞ Pour montrer qu'une suite de variables Y_n est une chaîne de Markov, il faut montrer qu'elle n'a pas de mémoire (dans les cas positifs ci dessus, il suffit d'écrire les choses et tout marche bien). Plus bas, on donne seulement les matrices de transitions ou les contre-exemples.

1. Oui, avec la même matrice P.

2. Oui, avec la matrice P^2.

3. Oui, car $x \mapsto 2x+1$ est une injection. On note S' l'image de S par cette injection. La matrice de transition de $(2X_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours P, une fois qu'on a appliqué la bijection sur les états.

4. Non, car $x \mapsto \lfloor x/10 \rfloor$ n'est pas une injection. Par exemple, on considère une marche sur $\mathbb{Z}$ qui à chaque fois se déplace de 1 sur la droite avec probabilité 1 (i.e. $P(x,x+1)=1$). Alors :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\lfloor X_n/10 \rfloor = 2 \mid \lfloor X_{n-1}/10 \rfloor = 1 \cap \lfloor X_{n-2}/10 \rfloor = 0\right\} \\ = & \ 0 \\ \neq & \ \mathbf{P}\left\{\lfloor X_n/10 \rfloor = 2 \mid \lfloor X_{n-1}/10 \rfloor = 1\right\}. \end{aligned}$$

L'intuition est que comme $\lfloor X_n/10 \rfloor$ augmente de 1 tous les 10 coups, alors les 10 coups précédents peuvent apporter de l'information (et pas juste le précédent).

5. Oui, avec la matrice de transition Q donnée par :

$$Q((x,y),(u,v)) = 0 \ \text{ si } y \neq u \quad \text{ et } \quad Q((x,y),(y,z)) = P(y,z) \ \text{ sinon.}$$

Par exemple, pour $S = \{0,1\}$, on peut dessiner Q en fonction de P :

$$\text{si } P := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } Q := \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}.$$

6. Non, contre-exemple : la chaîne définie sur $\{1,2,3\}$ par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (i.e. un cycle de taille 3). Si on fusionne les états 1 et 2 ce n'est plus une chaîne de Markov : on a $\mathbf{P}\{Y_2 = 3 \mid Y_1 = T_{12} \text{ et } Y_0 = T_{12}\} = 1 \neq 0 = \mathbf{P}\{Y_2 = 3 | Y_1 = T_{12} \text{ et } Y_0 = 3\}$.

Exercice 5. *On tourne en rond !*

Soit $p > 1$ un entier.

1. Soit (X_n) la chaîne de Markov d'espace d'états $\{1, ..., p\}$ et de matrice de transition donnée par :

$$Q(1,1) = 1, \quad Q(p,p) = 1, \quad Q(i,i-1) = Q(i,i+1) = \frac{1}{2}$$

si $1 < i < p$, les autres coefficients étant nuls.

Pour $1 \geq i \geq p$, calculer $\mathbf{P}\{X_n = 1 \text{ pour } n \text{ assez grand } | X_0 = i\}$.

☞ On note $x_i = \mathbf{P}\{X_n = 1 \text{ pour } n \text{ assez grand } | X_0 = i\}$. On a facilement la relation de récurrence suivante :

$$x_1 = 1 \tag{1}$$

$$x_p = 0 \tag{2}$$

$$x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_{i+1} \quad 1 < i < p \tag{3}$$

On peut alors étudier la suite avec son polynôme caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui donne une solution de la forme :

$$x_i = \alpha + \beta i \tag{4}$$

et on trouve

$$x_i = \frac{p-i}{p-1}. \tag{5}$$

Soit G le graphe circulaire à p sommets (c'est à dire, le graphe de sommets $\{0, 1, ..., p-1\}$ où tout sommet i est relié aux sommets $i-1$ et $i+1$ modulo p).

On considère la marche aléatoire issue du point 0, et on s'intéresse à l'ordre dans lequel on "découvre" les sommets (c'est-à-dire l'ordre dans lequel chaque sommet est visité pour la première fois).

2. Quelle est la probabilité que le dernier sommet découvert par la marche aléatoire soit le point 1 ?

   ☞ On cherche à déterminer la probabilité que la marche aléatoire visite tous les sommets avec 1 en dernier. Si on note x_i la probabilité que le dernier sommet visité par la marche aléatoire soit le point 1 en partant de i, on a clairement $x_0 = x_2$, $x_{p-1} = x_3$, etc. Et on a une relation de récurrence similaire à la question 1, $x_0 = \frac{1}{2}x_{p-1}$, $x_{p-2} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_{p-3}$: on en déduit que $x_0 = \cdots = x_{p-1}$.

Comme c'est vrai quel que soit le sommet de départ ou d'arriver (cf dessin), finalement $x_0 = \frac{1}{p-1}$.

3. Quelle est la loi du dernier sommet découvert ?

☞ Avec le raisonnement de la question précédente, c'est une loi uniforme dans $\{1, \ldots, p-1\}$.