L3 – Probabilités (Année 2025/2026)

Anne Gagneux & Lison Blondeau-Patissier

TD 10 – Chaînes de Markov

Exercice 1. *Prévisions météo*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, alors le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov que l'on représentera à la fois sur sa forme graphique et sous la forme matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Peut-on supposer maintenant que l'on a deux états, un pour "Beau temps" et un pour "Mauvais Temps" ? Déterminer la nouvelle matrice de transition.

Exercice 2. *Un exemple détaillé*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{S}$ de matrice de transition P.

Pour tout état y, on note $T_y := \min\{n \mid X_n = y\}$ (avec la convention $\min\emptyset = +\infty$).

Pour tout événement A, on note $\mathbf{P}_x\{A\} := \mathbf{P}\{A|X_0 = x\}$.

Soient x et y deux états distincts, on pose $\rho_{xy} := \mathbf{P}_x\left\{T_y < +\infty\right\}$.

Les questions de cet exercice sont simples, le but est de manier les définitions avec des démonstrations détaillées.

1. Montrer que $\rho_{xy} > 0 \iff \exists n \geq 1, P^n(x,y) > 0$.

On suppose désormais $\rho_{xy} > 0$.

2. Soit $n_0 = \min\{n \geq 1 \mid P^n(x,y) > 0\}$, et $x_1, \ldots, x_{n_0-1} \in S$ tels que $P(x,x_1)\ldots P(x_{n_0-1},y) > 0$.

Montrer que les états $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} = y$ sont distincts.

3. Supposons $\mathcal{S}$ fini de cardinal d. Montrer que $n_0 \leq d-1$.

4. Montrer que $\mathbf{P}_x\left\{T_y \leq d-1\right\} > 0$.

Exercice 3. *Suite de 1*

On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$. Fixons $k \in \mathbb{N}$.

On note $p_{k,n}$ la probabilité d'obtenir au moins k 1 consécutifs dans $U_1 \ldots U_n$. Comment représenter $p_{k,n}$ en utilisant le formalisme des chaînes de Markov ?

Exercice 4. *Chaînes dérivées*

Soit $M_0 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. Pour chacune des M_i définies ci-dessous, on vous demande de dire :

a. Est-ce que M_i est une chaîne de Markov ? On demande une preuve ou un contre-exemple.

b. Si oui, donner la matrice de transition de M_i.

On définit les suites M_i suivantes :

1. Soit $r \in N$. On pose $M_1 = (X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose $M_2 = (X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$, et on pose $M_3 = (2X_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Toujours en supposant $S \subset \mathbb{Z}$, on pose $M_4 = (\lfloor X_n/10 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose $M_5 = (X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On suppose les états de S numérotés avec $S = \{S_1, S_2, \dots\}$. On définit $S' = \{T_{12}, S_3, S_4, \dots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de S par un nouvel état T_{12}). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S \setminus \{S_1, S_2\}$ et $Y_n = T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). On pose $M_6 = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. *On tourne en rond !*

Soit $p > 1$ un entier.

1. Soit (X_n) la chaîne de Markov d'espace d'états $\{1, ..., p\}$ et de matrice de transition donnée par :

$$Q(1,1) = 1, \quad Q(p,p) = 1, \quad Q(i,i-1) = Q(i,i+1) = \frac{1}{2}$$

si $1 < i < p$, les autres coefficients étant nuls.

Pour $1 \geq i \geq p$, calculer $\mathbf{P}\left\{X_n = 1 \text{ pour } n \text{ assez grand } | X_0 = i\right\}$.

Soit G le graphe circulaire à p sommets (c'est à dire, le graphe de sommets $\{0, 1, ..., p-1\}$ où tout sommet i est relié aux sommets $i-1$ et $i+1$ modulo p).
On considère la marche aléatoire issue du point 0, et on s'intéresse à l'ordre dans lequel on "découvre" les sommets (c'est-à-dire l'ordre dans lequel chaque sommet est visité pour la première fois).

2. Quelle est la probabilité que le dernier sommet découvert par la marche aléatoire soit le point 1 ?

3. Quelle est la loi du dernier sommet découvert ?