TD 09 – Méthode probabiliste

Exercice 1. *TCL*

Rappel 1 : Étant donnée une variable aléatoire discrète X à valeurs entières, on appelle *fonction génératrice de X* la fonction $G_X(z) := \mathbf{E}\left[z^X\right]$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{N}$.
   Si X et Y sont indépendantes, que peut-on dire de G_{X+Y} ?

Rappel 2 : Loi de Poisson : Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{1}$$

2. Montrer qu'une somme de n variables indépendantes de Poisson de paramètre 1 suit une loi de Poisson de paramètre n
3. Calculer à l'aide du théorème central limite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}. \tag{2}$$

Exercice 2. *Conditions de convergence*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i.
2. En déduire que la presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i.

Exercice 3. *Un c'est bien, deux c'est mieux*

Deux cent étudiant·es participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiant·es ont réussi à répondre correctement. Montrer qu'il existe deux étudiant·es qui avaient tout bon à elleux deux (*i.e.* tels que pour chaque question, au moins un·e des étudiant·es a bien répondu).

Exercice 4. *Union d'intervalles*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0;1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0,1$.

Exercice 5. *Un problème complexe*

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Rightarrow |P(z)| = 1$.
Montrer que $a = b = 0$.
Indication : *on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$*, où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*

Exercice 6. *Lemme local de Lovász*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que :

1. Pour tout $i \in I$, $|A_i| = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $|\{i \in I \mid x \in A_i\}| \leq \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász [1], montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_i \cap F_2 \neq \emptyset\,.$$

Lemme Local de Lovász (rappel) : *Soient n, d des entiers, $0 \leq p \leq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que :*

1. *pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{P}\left\{A_i\right\} \leq p$,*
2. *les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ admettent un graphe de dépendance de degré $\leq d$,*
3. *on a $4dp \leq 1$.*

Alors on a $\mathbf{P}\left\{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right\} > 0$.

Exercice 7. *Partition de graphe*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé avec n sommets et m arrêtes.
Montrer qu'il existe une partition de V en deux ensembles disjoints A et B telle que au moins la moitié des arrêtes de G relie un sommet de A et un sommet de B.

1. László Lovász (né en 1948), mathématicien hongrois.