L3 – Probabilités (Année 2025–2026)
Anne Gagneux & Lison Blondeau-Patissier

TD 08 – Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires (corrigé)

Exercice 1. *Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé ***nombre chromatique***, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski** [1] : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon-1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.

   ☞ Pour trois sommets distincts a, b et c, la probabilité d'être un triangle est p^3. Il y a $\binom{n}{3}$ ensembles de trois sommets, donc l'espérance du nombre de triangle est $\mathbf{E}[N] \leq n^3p^3$. Par Markov,

$$\mathbf{P}\left\{N \geq \frac{n}{2}\right\} \leq \frac{n^3p^3}{\frac{n}{2}} = 2n^2p^3 = 2n^{3\varepsilon-1} \to 0.$$

2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand ***ensemble indépendant*** de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

☞ Par définition de $\chi(G)$, il existe un coloriage de G avec $\chi(G)$ couleurs, autrement dit une partition de V en $\chi(G)$ ensembles indépendants. Alors pour chaque tel sous-ensemble A, on a $\alpha(G) \geq |A|$. Donc $\chi(G) \times \alpha(G) \geq n$, d'où le résultat.

3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 .$$

En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

☞ Pour tous sommets $v_1, \ldots, v_a$ distincts, on a

$$\mathbf{P}\{\{v_1, \ldots, v_a\} \text{ est indépendant}\} = (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} .$$

Donc

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) \geq a\} \quad \leq \quad \binom{n}{a}(1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} \quad < \quad n^a (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} \quad < \quad n^a\, e^{-p\frac{a(a-1)}{2}}$$

Donc (question 1 et question 3) il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

☞ Par la question 2, on a

$$\chi(G') \quad \geq \quad \frac{|G'|}{\alpha(G')} \quad > \quad \frac{n}{2} \times \frac{1}{a} \quad = \quad \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n} .$$

Ce qui conclut la preuve du théorème (pour n assez grand, on peut obtenir

G' sans triangle avec $\chi(G')$ aussi grand que l'on veut).

Exercice 2. *Second théorème de Borel–Cantelli*

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel-Cantelli[2]. Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les évènements sont indépendants.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements *indépendants* de probabilité p_n, telle que la somme $\sum_n p_n$ diverge.

On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'évènements A_n se réalisent.

1. Exprimer l'évènement $E_\infty :=$ « une infinité d'évènements A_n se réalisent » en terme d'unions et d'intersections des évènements A_n.

   ☞ Soit $\omega \in \Omega$ un élément de l'espace de probabilité. Alors ω appartient à E_∞ si et seulement si ω appartient à une infinité de A_n, *i.e.* si et seulement si $\omega \in \cap_{k\geq 0} \cup_{n\geq k} A_n$. Donc :

$$E_\infty = \cap_{k\geq 0} \cup_{n\geq k} A_n \,.$$

   On l'appelle aussi $\limsup A_n$.

2. Soit $B_{k,\ell}$ l'évènement $\cap_{k\leq n\leq \ell}\overline{A_n}$. Montrer que pour tout k fixé, $\lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\} = 0$.

   Indice : *on pourra utiliser l'inégalité $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

   ☞ Par indépendance des A_n (et donc indépendance de leur complémentaire), on a $\mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\} = \prod_{n=k}^{\ell}(1-p_n)$. En utilisant l'indice, on a alors $\mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\} \leq \prod_{n=k}^{\ell} e^{-p_n} = e^{-\sum_{n=k}^{\ell} p_n}$. Mais par hypothèse, la somme des p_n diverge, donc pour tout k fixé, $\lim_{\ell\to\infty}\sum_{n=k}^{\ell} p_n = +\infty$. On conclut que $\lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\} = 0$.

3. On note $B_k := \cap_{n\geq k}\overline{A_n}$. En déduire que $\mathbf{P}\left\{\cup_k B_k\right\} = 0$.

---

2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français ; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien

☞ Il suffit de montrer que $\mathbf{P}\{B_k\} = 0$ pour tout k. On aura alors $\mathbf{P}\{\cup_k B_k\} \leq \sum_k \mathbf{P}\{B_k\} = 0$. Mais $\mathbf{P}\{B_k\} = \mathbf{P}\{\cap_{n\geq k}\overline{A_n}\} = \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}\{B_{k,\ell}\}$, car les évènements $B_{k,\ell}$ sont décroissants et leur intersection est égale à B_k. On conclut avec la question précédente que $\mathbf{P}\{B_k\} = 0$.

4. Conclure que $\mathbf{P}\{E_\infty\} = 1$.

☞ Par la première question, $E_\infty = \cap_{k\geq 0} \cup_{n\geq k} A_n$. Le complémentaire de cet évènement est $\overline{E_\infty} = \cup_{k\geq 0} \cap_{n\geq k} \overline{A_n} = \cup_{k\geq 0} B_k$. Par la question précédente, on a donc $\mathbf{P}\{\cap_{k\geq 0} \cup_{n\geq k} A_n\} = 1 - \mathbf{P}\{\cup_{k\geq 0} B_k\} = 1$.

5. *Application.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{1}{n}$.
Montrer que, presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

☞ Commençons par montrer que presque sûrement la suite X_n contient un nombre infini de '1'. On note A_n l'évènement « $X_n = 1$ ». On a $\mathbf{P}\{A_n\} = 1/n$, et donc $\sum_n \mathbf{P}\{A_n\}$ diverge. De plus, les A_n sont indépendants car les X_n le sont. D'après le second théorème de Borel–Cantelli, on a donc $\mathbf{P}\{$« une infinité d'évènements A_n se réalisent »$\} = 1$, ce qui est équivalent à dire que presque sûrement la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une infinité de 1.

Montrons maintenant que presque sûrement la suite X_n ne contient qu'un nombre fini de '11'. On utilise cette fois le théorème de Borel-Cantelli vu en cours. Soit C_n l'évènement « $X_n = X_{n+1} = 1$ ». Par indépendance de X_n et X_{n+1}, on a $\mathbf{P}\{C_n\} = 1/(n^2+n) \leq 1/n^2$.

*Remarque : Les C_n ne sont **pas** indépendants, mais l'indépendance n'est pas nécessaire pour le théorème de Borel–Cantelli dans ce sens.*

Donc la somme $\sum_n \mathbf{P}\{C_n\}$ converge. D'après le théorème de Borel–Cantelli, on conclut que presque sûrement, seuls un nombre fini d'évènements C_n sont réalisés. C'est-à-dire, presque sûrement il n'y a qu'un nombre fini de '11' dans la suite des X_n.

Comme l'intersection de deux évènement presque sûrs est aussi presque sûre, on conclut que presque sûrement la suite X_n contient un nombre infini de '1', mais seulement un nombre fini de '11'.

Exercice 3. *Conditions de convergence*

Soit X_n une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1 - p_n$, avec $0 \leq p_n \leq 1/2$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en distribution.

   ☞ Supposons que les variables X_n convergent en distribution vers une variable X. Les fonctions de répartitions F_{X_n} des variables X_n sont comme sur la Figure 1.

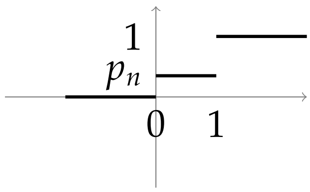

FIGURE 1 – Fonction de répartition de X_n

   En particulier, elles sont continues en $1/2$, et pour tout n, on a $F_{X_n}(1/2) = p_n$. Notons $p = F_X(1/2)$. Par définition de la convergence en distribution, on a $\lim_{n\to\infty} p_n = p$; en particulier, les p_n convergent.

   À l'inverse, supposons que les p_n convergent vers une constante p. Comme $[0, 1]$ est fermé et que les p_n vivent dans $[0, 1]$, on a $p \in [0, 1]$. Définissons X la variable de Bernoulli de paramètre p. Alors, on a bien, pour tout $x \neq \{0, 1\}$, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, *i.e.* X_n converge en distribution vers X.

   On conclut que X_n converge en distribution ssi p_n converge. *Intuitivement : « les lois des X_n sont proches. »*

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en probabilité.

☞ Comme la convergence en probabilité implique la convergence en distribution, on sait qu'une condition nécessaire est que les p_n convergent. Mais ce n'est pas une condition suffisante. Supposons par exemple que $p_n = 1/2$ pour tout n. Alors les p_n sont bien convergents, mais, en prenant $\varepsilon = 1/2$, on a $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = 1/2$ par indépendance des X_n. Cette quantité ne tend clairement pas vers zéro, donc les X_n ne peuvent pas converger en probabilité. Le problème ici est que les X_n suivent bien la même loi, mais comme ils sont indépendants, rien ne nous assure que leurs valeurs seront proches.

Reprenons notre condition nécessaire. Supposons que X_n converge en probabilité vers X. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0$. Par inégalité triangulaire, cela implique que $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq 2\varepsilon\} \to 0$. Prenons $2\varepsilon = 1/2$.

On obtient $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq 2\varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} \geq p_n$. En effet, une fois X_{n+1} fixé, on a $\mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = p_n$ si $X_{n+1} = 1$ et $\mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = 1 - p_n$ si $X_{n+1} = 0$. Dans tous les cas, cette probabilité est supérieur à p_n, car on a choisi $p_n \leq 1/2$.

On en déduit donc que $p_n \to 0$.

Supposons maintenant $p_n \to 0$, et notons X la variable aléatoire valant toujours 1. On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n = 0\} = p_n \to 0\,.$$

On en conclut que X_n converge en probabilité vers X.

On a donc que X_n converge en probabilité ssi p_n tend vers 0 (avec la contrainte $p_n \leq 1/2$).

Intuitivement : « les valeurs des X_n sont proches ».

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge presque sûrement.

☞ On a vu que si la suite X_n converge presque sûrement, alors elle converge vers 1 (car elle converge en probabilité). On veut donc montrer que $\mathbf{P}\{X_n \to 1\} = 1$, quitte à faire quelques hypothèses supplémentaires sur les p_n.

On sait, d'après le lemme de Borel–Cantelli, que si $\sum_n p_n$ converge alors avec probabilité 1 un nombre fini de variables X_n valent 0 (car les évènements « $X_n = 0$ » ont probabilité p_n). Mais dire qu'un nombre fini de variables X_n valent 0 est équivalent à dire que les X_n convergent vers 1, car les variables X_n sont à valeur dans $\{0,1\}$. On en déduit donc que si $\sum_n p_n$ converge, alors X_n converge vers 1 presque sûrement.

Pour la réciproque, on utilise le second théorème de Borel–Cantelli, qui dit que si les X_n sont indépendants et que $\sum p_n$ diverge, alors avec probabilité 1 il existe une infinité de X_n valant 0. En particulier, X_n ne peux pas converger vers 1. On en déduit donc que si X_n converge presque sûrement, alors $\sum_n p_n$ converge.

On a donc que X_n converge presque sûrement ssi $\sum_n p_n$ converge.

Exercice 4. *Suite de bits aléatoires*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i.

☞ Soit w un mot fini de longueur k. Pour tout $j \geq 0$, on définit A_j l'évènement « $X_{kj+1} \cdots X_{k(j+1)} = w$ ». On a $\mathbf{P}\{A_j\} = \frac{1}{2^k}$. De plus, par indépendance des X_i (et lemme de groupement par paquets), les évènements A_j sont indépendants. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{w \text{ n'apparaît pas dans la suite } X_i\} &\leq \mathbf{P}\left\{\cap_{j\in\mathbb{N}} \overline{A_j}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\cap_{0\leq j\leq N} \overline{A_j}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^N \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc w apparaît dans la suite X_i avec probabilité 1.

On note maintenant Y_w l'évènement « le mot w apparaît dans la suite X_i ». On a vu que pour tout w fini, $\mathbf{P}\{Y_w\} = 1$. De plus, il y a un nombre dénombrable de mots finis, *i.e.* un nombre dénombrables d'évènements Y_w. On en déduit que $\mathbf{P}\{\cup_w \overline{Y_w}\} \leq \sum_w \mathbf{P}\{\overline{Y_w}\} = 0$, et finalement $\mathbf{P}\{\cap_w Y_w\} = 1$.

2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i.

☞ Tout mot fini est un sous-mot d'une infinité de mots fini distincts. Donc si une séquence infinie contient tout mot fini, elle contient tout mot fini une infinité de fois (car elle contiendra tous les sur-mots d'un mot fixé, et qu'il y en a une infinité).

Exercice 5. *Applications*

1. Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires avec $\mathbf{E}[X_n] = 5$ et $\mathbf{Var}[X_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n.

$\{X_n\}$ converge-t-elle en probabilité vers 5 ?

☞ Selon la définition, $\{X_n\}$ converge en probabilité vers 5 signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\{|X_n - 5| > \varepsilon\} \;=\; 0\,.$$

Or, ici $\mathbf{E}[X_n] = 5$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Chebyshev nous donne :

$$\mathbf{P}\{|X_n - 5| > \varepsilon\} \;\leq\; \frac{\mathbf{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

ce qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. Soient $\{X_n\}$ des variables aléatoires iid avec $\mathbf{E}[X_n] = 4$ et $\mathbf{Var}[X_n] = 9$ pour tout n.

Trouver $C(n, x)$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_n \leq C(n,x)\} = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt\,.$$

☞ Pour utiliser le Théorème Central Limite, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \mu = \mathbf{E}\left[X_1\right], \qquad \sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[X_1]}, \qquad Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Soit Z une v.a. suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, par le T.C.L. on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{Z_n \leq x\right\} = \mathbf{P}\left\{Z \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \Phi(x).$$

Or, on a :

$$Z_n \leq x \iff \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 4n}{3\sqrt{n}} \leq x \iff \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 4n + 3x\sqrt{n}.$$

Donc en posant $C(n,x) := 4n + 3x\sqrt{n}$ on obtient le résultat.

3. Donner un exemple de suite $\{Y_n\}$ telle que :
— $\{Y_n\}$ converge en probabilité vers 0,
— $\{\frac{Y_n}{n}\}$ converge presque sûrement vers 0,
— mais $\{Y_n\}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

☞ On numérote tous les mots sur $\{0,1\}$ par ordre croissant de longueur, *i.e.* $w_1 = \varepsilon$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$, $w_4 = 00$, etc. On pose l_n la longueur du mot w_n ; on remarque que l_n est de l'ordre de $\log n$, car tous les mots entre w_{2^k} et $w_{2^{k+1}-1}$ sont de longueur k.

On fait maintenant une infinité de lancers à pile ou face d'une pièce équilibrée, et on définit $Y_n :=$ « le résultat des l_n premiers lancers correspond exactement au mot w_n » (avec par exemple 1 pour Pile et 0 pour Face).

De cette manière, pour tout k, exactement un Y_i parmi $Y_{2^k}, \ldots, Y_{2^{k+1}-1}$ vaut 1 et tous les autres valent 0.

Montrons que Y_n converge en probabilité vers 0. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}\left\{|Y_n| > \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\left\{Y_n = 1\right\} = \frac{1}{2^{l_n}} \approx \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Puis, montrons que $\frac{Y_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0. Pour tout n, on

a $\left|\frac{Y_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{n} = 0\right\} = 1$.
Enfin, montrons que Y_n ne converge pas presque sûrement vers 0. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un Y_i parmi $Y_{2^k}, \ldots, Y_{2^{k+1}-1}$ qui vaut 1. Donc Y_n ne peut pas tendre vers 0, ce qui signifie que $\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right\} = 0$.