TD 08 – Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires

Exercice 1. *Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé ***nombre chromatique***, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski** [1] : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon - 1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.

2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand ***ensemble indépendant*** de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\left\{\alpha(G) < a\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1\,.$$

En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

Exercice 2. *Second théorème de Borel–Cantelli*

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel-Cantelli [2]. Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les évènements sont indépendants.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements *indépendants* de probabilité p_n, telle que la somme $\sum_n p_n$ diverge. On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'évènements A_n se réalisent.

1. Exprimer l'évènement $E_\infty :=$ « une infinité d'évènements A_n se réalisent » en terme d'unions et d'intersections des évènements A_n.
2. Soit $B_{k,\ell}$ l'évènement $\cap_{k\le n\le \ell}\overline{A_n}$. Montrer que pour tout k fixé, $\lim_{\ell\to\infty}\mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\}=0$.
   Indice : *on pourra utiliser l'inégalité* $1+x\le e^x$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.
3. On note $B_k := \cap_{n\ge k}\overline{A_n}$. En déduire que $\mathbf{P}\left\{\cup_k B_k\right\}=0$.
4. Conclure que $\mathbf{P}\left\{E_\infty\right\}=1$.
5. *Application.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n=\frac{1}{n}$. Montrer que, presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

Exercice 3. *Conditions de convergence*

Soit X_n une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $\mathbf{P}\left\{X_n=1\right\}=1-p_n$, avec $0\le p_n\le 1/2$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en distribution.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en probabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge presque sûrement.

Exercice 4. *Suite de bits aléatoires*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i.
2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i.

Exercice 5. *Applications*

1. Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires avec $\mathbf{E}\left[X_n\right]=5$ et $\mathbf{Var}[X_n]=\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n.
   $\{X_n\}$ converge-t-elle en probabilité vers 5 ?
2. Soient $\{X_n\}$ des variables aléatoires iid avec $\mathbf{E}\left[X_n\right]=4$ et $\mathbf{Var}[X_n]=9$ pour tout n.
   Trouver $C(n,x)$ tel que :
   $$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left\{X_1+\ldots+X_n\le C(n,x)\right\}=\Phi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt\,.$$
3. Donner un exemple de suite $\{Y_n\}$ telle que :
   — $\{Y_n\}$ converge en probabilité vers 0,
   — $\{\frac{Y_n}{n}\}$ converge presque sûrement vers 0,
   — mais $\{Y_n\}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français ; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien