TD 02 – Variables Aléatoires

Exercice 1. *Indépendance*

Soient X,Y et Z des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. XY et Z sont indépendantes.
2. XY et YZ sont indépendantes.
3. X, Y et XY sont indépendantes.

Exercice 2. *Rouge et Vert*

1. Supposons que l'on commence avec une urne contenant 2 boules, une rouge et une verte. On répète la procédure suivante jusqu'à ce que l'urne contienne n boules : à chaque étape, on tire une balle uniformément de l'urne, et on la remet ainsi qu'une autre boule de même couleur dans l'urne. Montrer que le nombre de boules rouges a la même probabilité d'être n'importe quel nombre entre 1 et $n-1$.

2. On se donne maintenant une urne avec n boules rouges et $100-n$ boules vertes, où n est choisi uniformément entre 0 et 100. On tire aléatoirement une boule de l'urne, elle est rouge, et on la retire. La prochaine boule tirée aléatoirement a-t-elle plus de chances d'être rouge ou verte ?

Exercice 3. *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on procède à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne. On s'intéresse aux évènements $E_i =$ « la $i$ème boule tirée porte le numéro i».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   (a) E_i pour $1 \leq i \leq n$,
   (b) $E_i \cap E_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$,

(c) $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

3. Calculer la probabilité que l'évènement E_i se produise pour au moins un i.
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?

Exercice 4. *La martingale classique*

On considère une version simplifiée de la roulette où on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Une joueuse gagne le double de sa mise si la balle tombe sur la couleur qu'elle a choisie, elle perd sa mise sinon. Une stratégie de jeu populaire est la suivante : au premier tour, la joueuse mise 1 euro. Tant qu'elle perd, elle double sa mise (elle parie 2^{k-1} euros au k-ième tour).

1. Montrer qu'en suivant cette stratégie, la joueuse finit par gagner 1 euro.

2. Soit X la variable aléatoire qui mesure la perte maximale avant de gagner. Montrer que $\mathbf{E}\left[X\right]$ est non bornée.

3. Soit X_j le montant gagné ou perdu lors du tour j (X_j vaut 0 si la joueuse a gagné lors d'un tour précédent.) Calculer $\mathbf{E}\left[X_j\right]$, et montrer que, en utilisant la linéarité de l'espérance, l'espérance du gain vaut 0. Est ce que la linéarité de l'espérance tient dans ce cas ?

Exercice 5. *Débiaiser des bits*

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, mais que vous ne connaissiez pas la valeur de $p \in]0,1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0,1\}$.

2. On souhaite maintenant produire n bits indépendants de loi uniforme sur $\{0,1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de t telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de tn fois soit inférieure à $\frac{1}{100}$ pour n assez grand. *Évidemment, plus t est petit, mieux c'est.*

Exercice 6. *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme déterministe qui prend en entrée une chaîne de n bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas ?

Exercice 7. *Répétitions dans une suite de bits aléatoires*

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Une répétition est un sous-mot de $X_1 X_2 \cdots X_n$ du type $00 \cdots 0$ ou $11 \cdots 1$. Par exemple, la suite 00011001 contient 4 répétitions de longueur 2.

1. Pour $p > 1$ fixé, quelle est l'espérance du nombre de répétitions de longueur p ? Montrer que pour $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$, cette espérance est de l'ordre de 1.
2. Montrer que pour $p \leq 0.99 \log_2 n$, la probabilité d'obtenir au moins une répétition de longueur p tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 8. *Intégration*

Axel souhaite participer à un club de sa nouvelle école (un seul, pour des raisons de temps !). Pendant la semaine d'intégration, les n clubs proposent chacun une activité de découverte, dans un ordre aléatoire. Après chaque activité, Axel peut décider soit de s'inscrire à ce club (et de ne pas aller aux activités de découverte suivantes), soit de ne pas s'y inscrire et de continuer à découvrir des clubs (tout choix est définitif).

Bien sûr, Axel aimerait choisir le meilleur club. Iel décide d'utiliser la stratégie suivante : d'abord, participer à m activités, sans inscription ; puis, après la m-ème activité, s'inscrire au premier club qui lui plait strictement plus que tous ceux déjà découverts (on considère qu'il n'y a pas d'ex-aequo).

1. Montrer que la probabilité qu'Axel choisisse le meilleur club est

$$\mathsf{P}_{n,m} = \frac{m}{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j-1} \,.$$

2. En déduire que $\lim_n \max_m \mathsf{P}_{n,m} \geq 1/e$.