TD 01 – Évènements

Exercice 1. *Compléments des indépendants*

1. Montrer qu'une famille d'événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante si et seulement si la famille des compléments $(\overline{A_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante. *Indice : On pourra commencer par montrer que la famille $\{\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n\}$ est indépendante ssi la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante.*

Exercice 2. *Magnets indépendants*

Deux colocataires, Charlie et Diane, achètent indépendamment une boîte de céréales proposant en cadeau un magnet d'un département français. Cette semaine la région mise à l'honneur est la Corse, chaque boîte de céréales contient donc soit le magnet Corse-du-Sud (2A), soit le magnet Haute-Corse (2B). Charlie et Diane espèrent avoir deux départements différents pour compléter la carte de France sur leur frigo. On va considérer les trois évènements suivants :

A Charlie obtient le magnet Corse-du-Sud,
B Diane obtient le magnet Corse-du-Sud,
C les deux magnets sont identiques.

1. Montrez que ces trois évènements sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

2. Jusqu'ici, nous avons supposé que la probabilité d'avoir le département 2A et celle d'avoir le département 2B étaient égales à $1/2$. En notant p la probabilité d'avoir le département 2A (celle d'avoir le département 2B est alors $1-p$), trouvez les valeurs de p pour lesquelles les évènements A et C sont indépendants.

3. De façon plus générale, proposer un exemple de n événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que pour tout $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, on ait $\mathbf{P}\{\cap_{i\in I} A_i\} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ mais qui ne soient pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^n A_i\} \neq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\}$).

4. Quel lien y a-t-il entre "être indépendants 2 à 2" et "être indépendants mutuellement" ?

Exercice 3. *Générer une loi uniforme*

1. Définir une variable aléatoire ayant une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ à partir d'une suite infinie de bits aléatoires. Est-ce possible à partir d'une suite finie ?

Exercice 4. *Monty Hall*

Monty est le présentateur d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture. Appelons le rideau que Bob choisi le rideau 1.
Ensuite, Monty ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (s'il y a une chèvre derrière les 2 autres rideaux, Monty en choisit un uniformément au hasard). Supposons que le rideau que Monty ouvre est le rideau 2. Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Monty ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

1. Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? (on suppose bien évidemment que Bob préfère gagner la voiture plutôt qu'une chèvre.... !)

Exercice 5. *Formule de Poincaré*

On se donne une suite d'évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Démontrez la formule suivante, due à Poincaré :

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\}.$$

2. **Application : Théorème des chapeaux.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n invités qui laissent leur chapeau au vestiaire (chaque personne en possède un seul). Quand ils repartent, les uns après les autres, ils prennent un chapeau au hasard. Les personnes sont numérotées de 1 à n. Soit A_i l'événement 'la personne n°i retrouve son chapeau'. Soit A l'événement 'aucune personne ne retrouve son chapeau'.

   Trouver la probabilité de A ainsi que sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 6. *Collisions*

Problème dit du *paradoxe des anniversaires*.

1. Considérons un groupe de personnes. En supposant que les jours de naissance sont équiprobables (et qu'aucune personne n'est née un 29 février), à partir de combien de personnes la probabilité d'avoir deux personnes avec le même anniversaire dépasse-t-elle $1/2$?

2. Quelle est la probabilité pour que deux personnes actuellement dans la pièce partagent la même date d'anniversaire (toujours sous les hypothèses d'équiprobabilité et en négligeant le 29 février) ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'une personne actuellement dans la pièce partage la même date d'anniversaire que vous ?

Exercice 7. *Météo*

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques qui se trompent de façon indépendante (la météo nationale n'utilise pas de grenouilles) :

- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100,
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

1. La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminez le temps le plus probable.

Exercice 8. *Jouons au triomino !*

1. Le triomino est un jeu composé de pièces triangulaires sur lesquelles sont inscrites trois chiffres de 0 à 5, qui peuvent être identiques ou non, en chacun de leur sommet. Le jeu officiel comporte 56 pièces : en manque-t-il ?