ENS LYON Lison Blondeau-Patissier & Anne Gagneux
L3 Probabilités

Devoir maison numéro 1
A rendre pour le 24 octobre.

Exercice 1 Variante Chernoff I

Adapter la preuve donnée en cours de Chernoff I pour trouver des bornes supérieures (exponentiellement décroissantes) sur $\mathbf{P}(X > (1+\delta)n)$ et $\mathbf{P}(X < (1-\delta)n)$ (préciser pour quels δ), où $X = X_1+\cdots+X_n$ et les v.a. $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont iid de loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

Exercice 2 Algorithmes de Las Vegas et Monte Carlo

Il y a deux grandes catégories d'algorithmes probabilistes. On appelle *algorithme de Las Vegas* un algorithme probabiliste qui donne toujours un résultat correct et dont le temps d'exécution est aléatoire. On appelle *algorithme Monte Carlo* un algorithme probabiliste dont le temps d'exécution est fixé mais qui renvoie un résultat parfois incorrect.

Soit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ une fonction que l'on cherche à calculer.

1. Supposons que l'on a un algorithme de Las Vegas $\mathcal{A}$ pour f, i.e., l'algorithme $\mathcal{A}$ sur l'entrée x renvoie toujours $f(x)$ mais le temps d'exécution est aléatoire. On sait seulement que le temps d'exécution moyen est majoré par $T(n)$, où $n = |x|$. Construire un algorithme de temps d'exécution majoré (déterministiquement) par $O(T(n))$ mais qui peut renvoyer une réponse fausse avec probabilité au plus $\frac{1}{10}$.
2. Supposons maintenant que l'on a un autre algorithme $\mathcal{A}$ qui, sur l'entrée x, renvoie $f(x)$ avec probabilité au moins $p > 0$, et dont le temps d'exécution est majoré par $T_1(n)$ où $n = |x|$. Supposons en plus qu'étant donné x et $\mathcal{A}(x)$, il est possible de vérifier de manière déterministe $\mathcal{A}(x) = f(x)$ en temps $T_2(n)$. Décrire un algorithme de Las Vegas pour calculer f avec un temps d'exécution d'espérance $O(\frac{T_1(n)+T_2(n)}{p})$.

Exercice 3 Aiguille de Buffon

Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788, scientifique et écrivain français) a proposé l'expérience suivante, visant à obtenir une approximation de π.

Considérons une aiguille de longueur a et un parquet composé de planches parallèles de même largeur l.

Dans un premier temps, on suppose $a < l$, et on s'intéresse à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches. On se donne la modélisation suivante :

— r désigne la distance du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche,

— $\theta \in [0, \pi/2]$ désigne l'angle formé par l'aiguille et l'une des rainures.

1. Quelles lois suivent r et θ ?

2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.

3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?

4. Maintenant qu'on a jeté des aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter dees ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet. Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle. *Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits segments.*

5. On se replace dans le cadre $a \leqslant l$. On a donc un moyen d'estimer $\frac{1}{\pi}$ puis π. On cherche désormais à contrôler l'erreur faite par cet estimateur.

Soit $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'aiguilles tombées sur deux planches parmi n lancers. Trouver une borne supérieure sur

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{A}{n} - \frac{c}{\pi}\right| \geqslant \delta\right) ,$$

où c est une constante à définir.

Pour $a = l$, comment choisir n pour obtenir une précision 10^{-3} de $\frac{1}{\pi}$ avec 95% de confiance ?

Bonus : vous pouvez faire une simulation numérique pour vérifier ce résultat empiriquement.