TD 12 – Chaînes de Markov (distributions invariantes) (corrigé)

Exercice 1. *Propositions utiles*

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j, alors j est aussi de période d.* » Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

☞ Si i et j communiquent, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$.

Puis, notons $R_i = \{k \in \mathbb{N} \mid p_{i,i}^{(k)} > 0\}$ (et de même pour R_j). Par hypothèse, on a $d = \mathrm{PGCD}(R_i)$. Notons $d_j = \mathrm{PGCD}(R_j)$.

Pour tout $k \in R_i$, on a $p_{j,j}^{(m+k+n)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(k)} p_{i,j}^{(n)} > 0$, donc $m+k+n \in R_j$. Mais $k \in R_i \implies 2k \in R_i$, donc on a aussi $m+2k+n \in R_j$. Alors $d_j | m+k+n$ et $d_j | m+2k+n$, donc $d_j | k$. Puisque cela est vrai pour tout $k \in R_i$, on obtient que $d_j | \mathrm{PGCD}(R_i)$.
Symétriquement, on montre que $d | d_j$, donc $d_j = d$.

Un état qui possède une boucle sur lui-même est forcément apériodique car il existe un chemin de lui-même à lui-même de longueur 1.

2. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.* »

☞ Comme i et j communiquent, on a $p_{i,j}^{(n_1)} > 0$ et $p_{j,i}^{(n_2)} > 0$ pour certains entiers n_1 et n_2. On en déduit :

$$\sum_n p_{j,j}^{(n_1+n+n_2)} \geq \sum_n p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(n_1)} = p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,j}^{(n_1)} \sum_n p_{i,i}^{(n)} = +\infty .$$

3. On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i. Une classe $\mathcal{C}$ d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, on a $P_{i,j} = 0$ (où $(P_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrer que :
   a. Une classe non close est transitoire.
   b. Une classe close **finie** est récurrente.
   En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

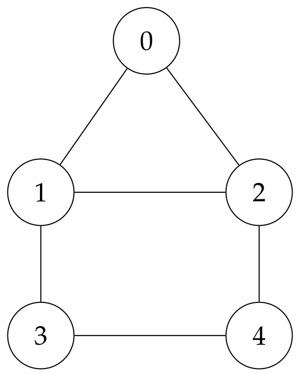
☞ **a.** Soit $\mathcal{C}$ une classe non-close. Il existe donc $i \in \mathcal{C}$ et $j \notin \mathcal{C}$ tels que $p_{i,j} \neq 0$. Or i et j ne communiquent pas car ils ne sont pas dans les mêmes classes, donc i n'est pas accessible depuis j. Donc pour tout n, $\mathbf{P}\{X_n = i | X_1 = j\} = 0$ (où X_n décrit le n-ième état dans une marche sur la chaîne de Markov). Soit T_i le temps d'atteinte de i, alors on déduit de ce qui précède que $\mathbf{P}\{T_i < \infty | X_1 = j\} = 0$. Finalement, $\mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i\} \geq \mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i, X_1 = j\} \mathbf{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} = 1 \cdot p_{i,j} > 0$. Cela prouve que i est transitoire, et donc que $\mathcal{C}$ l'est.
b. On considère maintenant une classe $\mathcal{C}$ close **finie**. Alors pour tout $i \in \mathcal{C}$, si on part de i, la chaîne reste dans $\mathcal{C}$. On note N_j le nombre de passages en l'état j. On a :

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j\in\mathcal{C}} N_j = \infty | X_0 = i\right\} = 1 .$$

Or cette somme a un nombre fini de termes, donc on en déduit que $\mathbf{P}\{\exists j \in \mathcal{C}, N_j = \infty | X_0 = i\} = 1$. Si on suppose que tout $j \in \mathcal{C}$ est transitoire, on aboutit à une contradiction, donc tous les j sont récurrents. Ainsi, toute classe finie close est récurrente.

4. Montrer que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.
   Indication : *on pourra montrer d'abord les points suivants :*
   — *x est transitoire ssi $\mathbf{E}[N_x | X_0 = y] < \infty$ pour tout état y,*
   — *Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \to 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne).*

☞ Soit π une loi de probabilité stationnaire et i un état transitoire. π vérifie pour tout n, $\pi p^n = \pi$ donc $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{j,i}^{(n)}$.
Or si i est transitoire, $p_{j,i}^{(n)}$ tend vers 0. En effet, i transitoire ssi $\mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = i\} = 0$ par définition. Or $\mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = i\} \geq \mathbf{P}\{N_i = \infty | X_0 = j\}$ pour tout état j (chaîne sans mémoire), d'où $\mathbf{E}[N_i | X_0 = j] < \infty$. Il s'ensuit que $p_{j,i}^{(n)} \to 0$.
On peut inverser série et limite par convergence dominée car $|p_{j,i}^{(n)}| \leq 1$ et $\sum_j \pi_j = 1$; on déduit alors $\pi_i = 0$.



Exercice 2. *Marche aléatoire dans un graphe*

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisit le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisins du sommet courant).

1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.

☞ La chaîne de Markov associée à la marche aléatoire sur le graphe est irréductible (le graphe est connexe). Elle est aussi apériodique grâce au triangle formé par les états $0, 1$ et 2. En effet, la période de l'état 0 est le pgcd de 2 (un aller retour $0-1-0$) et 3 (un cycle $0-1-2-0$). Donc l'état 0 est apériodique. Comme la chaîne est irréductible tous les états sont apériodiques. Si on trouve une distribution stationnaire, le théorème de convergence nous assurera une convergence vers cette distribution stationnaire. On observe que la distribution $\pi = (1/6, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6)$ est stationnaire (on peut la calculer en résolvant le système d'équations $\pi Q = \pi$ par exemple – *on peut remarquer que les états* 1 *et* 2 *se comportent de la même façon, de même pour* 3 *et* 4*, donc il suffit de considérer un système à trois inconnues.*). Le théorème de convergence nous permet de conclure que $\pi_n \to \pi$ quand n tend vers l'infini.

2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

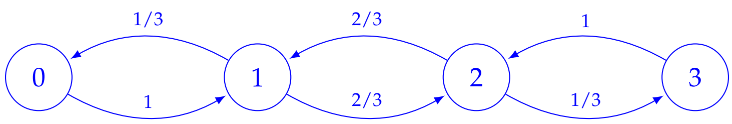
☞ La réponse est la même, le théorème de convergence ne dépend pas de l'état initial.

Exercice 3. *Diffusion*

On étudie un modèle simple des échanges de molécules de gaz entre deux récipients, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de molécules dans le premier récipient. Soit N le nombre total de molécules dans les deux récipients. L'échange est modélisé de la façon suivante : si le premier récipient contient x molécules à l'instant t, alors à l'instant $t+1$ il contient $x+1$ molécules avec probabilité $\frac{N-x}{N}$ et $x-1$ molécules avec probabilité $\frac{x}{N}$.

1. Décrire ce modèle avec une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition. Pour $N = 3$, dessiner la chaîne de Markov correspondante.

☞



Pour $N \in \mathbb{N}$, on a les formules suivantes : $P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$, $P_{i,i-1} = \frac{i}{N}$, $P_{i,j} = 0$ sinon.

2. Pour $N \in \mathbb{N}$, donner la distribution stationnaire de la chaîne de Markov.

☞ On utilise la propriété des flux : si on a une 2-partition de l'ensemble des états S en $S_1 \uplus S_2$, le « flux sortant » de S_1 vers S_2 est égal au « flux entrant » de S_2 vers S_1 lorsque l'on est dans un état d'équilibre (*i.e.* lorsque l'on suit une distribution stationnaire). Plus formellement :

$$\sum_{i \in S_1} \sum_{j \in S_2} \pi(i) P_{i,j} = \sum_{i \in S_1} \sum_{j \in S_2} \pi(j) P_{j,i} \,.$$

Ici, en regardant une coupe entre i et $i+1$ pour $0 \le i < N$, on sait donc que la distribution stationnaire π satisfait :

$$\pi_i \cdot \frac{N-i}{N} = \pi_{i+1} \frac{i+1}{N} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{aligned} \pi_{i+1} &= \frac{N-i}{i+1} \pi_i \\ &= \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^{i} \frac{N-j}{j+1} \\ &= \binom{N}{i+1} \pi_0 \end{aligned}$$

Donc pour $0 \le i \le N$, on a $\pi_i = \binom{N}{i+1} \pi_0$. Mais on sait aussi que $\sum_i \pi_i = 1$, *i.e.* $\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i+1} = 1$. On en déduit que $\pi_0 = 2^{-N}$.

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le premier récipient est vide (et le deuxième récipient contient N molécules). On note $T \leq 1$ le prochain instant où le premier récipient est vide. Calculer $\mathbf{E}[T]$.

☞ On sait que pour une chaîne irréductible finie, $h_i = \frac{1}{\pi_i}$. En particulier, pour $i = 0$, on a $h_0 = \frac{1}{\pi_0} = 2^n$.

Exercice 4. *Coloriage de triangles*

Une *k-coloration* d'un graphe est une fonction des sommets du graphe vers un ensemble de k couleurs. On dit qu'elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est dit *k-colorable* s'il possède une k-coloration propre.

Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est *monochromatique* si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

☞ Il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert. On recolorie les sommets verts en rouge. Chaque triangle contenait déjà un sommet rouge et un sommet bleu avant la recoloration, et c'est toujours le cas après.

On considère maintenant l'algorithme suivant, dont le but est de trouver une telle 2-coloration :

> On commence avec une 2-coloration arbitraire.
> Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur.

On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre pour $\{\text{Rouge}, \text{Bleu}, \text{Vert}\}$ (mais on ne la connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration.
Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?

☞ Dans ces cas, aucun triangle n'est monochromatique et on a terminé.

3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quel·s sont le ou les sommet·s à atteindre pour terminer ?
   Pour $j \in \{0, \ldots, n\}$, que peut-on dire de l'état j par rapport à l'état $n - j$?

☞ Supposons $m(c) = j \neq 0, n$ et regardons le triangle monochromatique choisi. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il est entièrement rouge. Avec proba $1/3$, on tire le sommet de V et on le recolore (en bleu) ; cela laisse $m(c)$ inchangé. Avec proba $1/3$, on tire le sommet de B et on le recolore ; on passe à $m(c) - 1$. Avec proba $1/3$, on tire le sommet de R et on le recolore ; on passe de $m(c)$ à $m(c) + 1$.
On obtient donc la chaîne de Markov suivante : pour $j \neq 0, n$, avec proba $1/3$ on passe à $j - 1$, avec proba $1/3$ on reste sur j, et avec proba $1/3$ on passe à $j + 1$. Pour $j = 0$ ou n, on reste sur l'état courant avec proba 1. Le but est d'atteindre le sommet 0 ou le sommet n. La chaîne est complètement symétrique entre l'état j et l'état $n - j$.

4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer lorsqu'on part d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1}. Déterminer h_0 et h_n.

☞ On a $h_0 = 0$ et $h_n = 0$. Pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$h_j = \frac{1}{3}(1 + h_{j-1} + 1 + h_j + 1 + h_{j+1})$$

autrement dit :

$$h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1}).$$

5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.

☞ On a $h_0 = h_1 + f(0) = h_1 - h_1 = 0$: ok. Par récurrence, on calcule :

$$h_j \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1}) \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_j + f(j-1) + h_{j+1})$$

d'où

$$\frac{1}{2}h_j \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}f(j-1) + \frac{1}{2}h_{j+1}$$

donc $h_j = h_{j+1} + 3 + f(j-1) = h_{j+1} + f(j)$ avec $f(j) = 3 + f(j-1)$, et donc $f(j) = 3j - h_1$.

6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$. Conclure.

Indication : *On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$, obtenue par symétrie.*

☞ On a $h_{n-1} = h_n + f(n-1) = 0 + f(n-1)$. Comme $h_1 = h_{n-1}$ et $f(n-1) = 3(n-1) - h_1$, on obtient $h_1 = 3(n-1) - h_1$ d'où $h_1 = 3(n-1)/2$. Donc $h(j) = h_{j+1} + 3j - 3(n-1)/2$. Ainsi,

$$h_j = h_n + \sum_{k=j}^{n-1}(3j - \frac{3}{2}(n-1)) = 0 + 3\sum_{k=j}^{n-1} j - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3\frac{(n-1+j)(n-j)}{2} - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3\frac{(n-j)}{2}(n-1+j-(n-1)) = \frac{3j(n-j)}{2}$$

d'où

$$h_{n/2} = \frac{3(n/2)^2}{2} = \mathcal{O}(n^2)\,.$$

Comme $h_{n/2}$ est le "milieu" de la chaîne, c'est le pire cas (on peut vérifier que c'est le maximum de h_j) et donc l'espérance du nombre de recolorations est bien quadratique.