TD 12 – Chaînes de Markov (distributions invariantes)

Exercice 1. *Propositions utiles*

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j, alors j est aussi de période d.* » Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

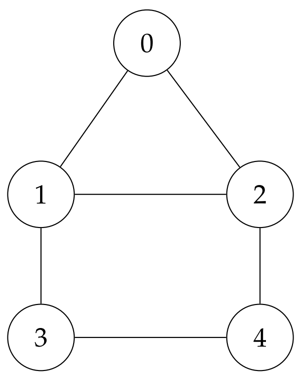
2. Redémontrer la propriété suivante vue en cours : « *la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.* »

3. On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i. Une classe $\mathcal{C}$ d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, on a $P_{i,j} = 0$ (où $(P_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrer que :
a. Une classe non close est transitoire.
b. Une classe close **finie** est récurrente.
En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

4. Montrer que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.
Indication : *on pourra montrer d'abord les points suivants :*
— *x est transitoire ssi $\mathbf{E}\left[N_x | X_0 = y\right] < \infty$ pour tout état y,*
— *Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \to 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne).*

Exercice 2. *Marche aléatoire dans un graphe*

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisit le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisins du sommet courant).



1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.

2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Exercice 3. *Diffusion*

On étudie un modèle simple des échanges de molécules de gaz entre deux récipients, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de molécules dans le premier récipient. Soit N le nombre total de molécules dans les deux récipients. L'échange est modélisé de la façon suivante : si le premier récipient contient x molécules à l'instant t, alors à l'instant $t+1$ il contient $x+1$ molécules avec probabilité $\frac{N-x}{N}$ et $x-1$ molécules avec probabilité $\frac{x}{N}$.

1. Décrire ce modèle avec une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition. Pour $N = 3$, dessiner la chaîne de Markov correspondante.
2. Pour $N \in \mathbb{N}$, donner la distribution stationnaire de la chaîne de Markov.
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le premier récipient est vide (et le deuxième récipient contient N molécules). On note $T \leq 1$ le prochain instant où le premier récipient est vide. Calculer $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 4. *Coloriage de triangles*

Une *k-coloration* d'un graphe est une fonction des sommets du graphe vers un ensemble de k couleurs. On dit qu'elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est dit *k-colorable* s'il possède une k-coloration propre.

Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est *monochromatique* si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

On considère maintenant l'algorithme suivant, dont le but est de trouver une telle 2-coloration :

> On commence avec une 2-coloration arbitraire.
> Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur.

On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre pour $\{$Rouge, Bleu, Vert$\}$ (mais on ne la connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration.

Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?
3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quel·s sont le ou les sommet·s à atteindre pour terminer ?
   Pour $j \in \{0, \ldots, n\}$, que peut-on dire de l'état j par rapport à l'état $n - j$?
4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer lorsqu'on part d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1}. Déterminer h_0 et h_n.
5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.
6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$. Conclure.
   Indication : *On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$, obtenue par symétrie.*