# TD 11 – Chaînes de Markov : récurrence et transience

**Exercice 1.** *Suite de 1*

On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$. On note $p_{k,n}$ la probabilité d'obtenir au moins $k$ 1 consécutifs dans $U_1 \dots U_n$. Donner une formule pour $p_{k,n}$ en utilisant le formalisme des chaînes de Markov.

**Exercice 2.** *Récurrence et Transience*

1. Soit $S = \{0, 1, \dots, n\}$ et $0 < p < 1$. On considère $M_1$ la chaîne de Markov de matrice de transition $P$ donnée par :

$$\text{pour } 0 \le x < n,\ \ P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et } \ P(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Dessiner le graphe associé à $M_1$. Quels sont ses états récurrents et ses états transients ?

2. Soit $S = \{1, \dots, 6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle corresponde à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

   Déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (*i.e.* aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides $C_1$ et $C_2$. Calculer, pour $i \in \{1,2\}$, la probabilité

$$\mathbf{P}\left\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\right\}.$$

**Exercice 3.** *Chaines de Markov ?*

Soit $M_0 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition $P$ sur un ensemble d'états $S$. On définit les suites $M_i$ suivantes :

1. Soit $r \in N$. On pose $M_1 = (X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose $M_2 = (X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$, et on pose $M_3 = (2X_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Toujours en supposant $S \subset \mathbb{Z}$, on pose $M_4 = (\lfloor X_n/10 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $M_5 = (X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose les états de $S$ numérotés avec $S = \{S_1, S_2, \dots\}$. On définit $S' = \{T_{12}, S_3, S_4, \dots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de $S$ par un nouvel état $T_{12}$). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S \setminus \{S_1, S_2\}$ et $Y_n = T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). On pose $M_6 = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour chaque $M_i$, on vous demande de dire :

- **a.** Est-ce que $M_i$ est une chaîne de Markov ? On demande une preuve ou un contre-exemple.
- **b.** Si oui, donner la matrice de transition de $M_i$.

**Exercice 4.** *Classification des états*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Donner sa représentation graphique.
2. Partitionner les états en composantes irréductibles.
3. Pour chaque état, dire s'il est transient ou récurrent.
4. Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
5. Donner la distribution stationnaire.
6. Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

**Exercice 5.** *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque $X_k$ prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et $-1$ avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps $m$, que peut-on dire de $m$ ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.
2. On définit de même la probabilité $f_{2n}$ qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).
3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

   Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.
4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

   ***Indication :*** *on rappelle que* $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.
5. Montrer que $f_{2m} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$. ***Indication :*** *considérer* $F'$.
6. Définissons $w_n$ la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps $n$. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.