TD 10 – Méthode probabiliste (suite) et chaines de Markov

Exercice 1. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que :

1. Pour tout $i \in I$, $|A_i| = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $|\{i \in I \mid x \in A_i\}| \leq \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász [1], montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Lemme Local de Lovász (rappel) : *Soient n, d des entiers, $0 \leq p \leq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que :*

1. *pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{P}\{A_i\} \leq p$,*
2. *les événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ admettent un graphe de dépendance de degré $\leq d$,*
3. *on a $4dp \leq 1$.*

Alors on a $\mathbf{P}\left\{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right\} > 0$.

Exercice 2. *Partition de graphe*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé avec n sommets et m arrêtes.
Montrer qu'il existe une partition de V en deux ensembles disjoints A et B telle que au moins la moitié des arrêtes de G relie un sommet de A et un sommet de B.

Exercice 3. *Meteo*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, alors le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov que l'on représentera à la fois sur sa forme graphique et sous la forme matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Peut-on supposer maintenant que l'on a deux deux états, un pour "Beau temps" et un pour "Mauvais Temps" ? Déterminer la nouvelle matrice de transition.

Exercice 4. *Tennis*

1. On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivia. Olivia gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivia de gagner le jeu.

   Rappel des règles : Les points se comptent ainsi : pas de point, 0 ; 1er point, 15 ; 2e point, 30 ; 3e point, 40. Au 4e point, le joueur gagne le jeu, sauf si son adversaire a aussi 40. On dit alors que les joueurs sont à égalité. Il faut marquer un 5e point appelé « avantage », puis illico un 6e pour remporter le jeu.
2. Lorsque $p \approx 0$, donner l'équivalent asymptotique de cette probabilité. Commenter.

1. László Lovász (né en 1948), mathématicien hongrois.

Exercice 5. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?
2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 6. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.
2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).
3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

Indication : on rappelle que $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

5. Montrer que $f_{2m} = \dfrac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$.
Indication : considérer F'.
6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.