# TD 09 – Méthode probabiliste (corrigé)

**Exercice 1.** *Coloriages*

La coloration d'un graphe $G$ consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le théorème de Mycielski[1] : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe $G$ tel que $G$ ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit $G$ un graphe aléatoire avec $n$ sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon-1}$. Montrer que quand $n$ tend vers l'infini, la probabilité que $G$ ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.

☞ Pour trois sommets distincts $a$, $b$ et $c$, la probabilité d'être un triangle est $p^3$. Il y a $\binom{n}{3}$ ensembles de trois sommets, donc l'espérance du nombre de triangle est $\mathbf{E}[N] \leq n^3p^3$. Par Markov,

$$\mathbf{P}\left\{N \geq \frac{n}{2}\right\} \leq \frac{n^3p^3}{\frac{n}{2}} = 2n^2p^3 = 2n^{3\varepsilon-1} \to 0.$$

2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand *ensemble indépendant* de $G$ (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

☞ Par définition de $\chi(G)$, il existe un coloriage de $G$ avec $\chi(G)$ couleurs, autrement dit une partition de $V$ en $\chi(G)$ ensembles indépendants. Alors pour chaque tel sous-ensemble $A$, on a $\alpha(G) \geq |A|$. Donc $\chi(G) \times \alpha(G) \geq n$, d'où le résultat.

3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon}\ln n$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

En déduire qu'il existe $n$ et $G$ de taille $n$ tels que $G$ a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

☞ Pour tous sommets $v_1, \ldots, v_a$ distincts, on a

$$\mathbf{P}\{\{v_1,\ldots,v_a\} \text{ est indépendant}\} = (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}}.$$

Donc

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) \geq a\} \quad\leq\quad \binom{n}{a}(1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} \quad<\quad n^a(1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} \quad<\quad n^a\, e^{-p\frac{a(a-1)}{2}} \quad\to 0.$$

Donc (question 1 et question 3) il existe $n$ et $G$ de taille $n$ tels que $G$ a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

4. Soit $G$ un tel graphe. Soit $G'$ un graphe obtenu à partir de $G$ en supprimant le minimum de sommets afin que $G'$ ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6\ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

☞ Par la question 2, on a

$$\chi(G') \quad\geq\quad \frac{|G'|}{\alpha(G')} \quad>\quad \frac{n}{2}\times\frac{1}{a} \quad=\quad \frac{n^\varepsilon}{6\ln n}\,.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème (pour $n$ assez grand, on peut obtenir $G'$ sans triangle avec $\chi(G')$ aussi grand que l'on veut).

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

**Exercice 2.** *Un c'est bien, deux c'est mieux*

Deux cent étudiant·es participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiant·es ont réussi à répondre correctement. Montrer qu'il existe deux étudiant·es qui avaient tout bon à elleux deux (*i.e.* tels que pour chaque question, au moins un·e des étudiant·es a bien répondu).

☞ On considère une distribution uniforme sur les couples d'étudiant·es avec remise. Soient $u$ et $v$ deux entiers entre 1 et 200 tirés uniformément au hasard (et indépendamment). Pour $1 \leq i \leq 6$, on note $u[i] = 1$ si l'étudiant·e $u$ a bien répondu à la question $i$, et $u[i] = 0$ sinon. On sait que pour tout $i$,

$$\mathbf{P}\{u[i] = 0\} \leq \frac{80}{200} = \frac{2}{5},$$

où la probabilité est prise sur le choix de $u$. De plus, on a :

$$\mathbf{P}\{v[i] = 0 \mid u[i] = 0\} \leq \frac{79}{199} < \frac{80}{200}.$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}\{u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{4}{25}.$$

D'où, par borne de l'union,

$$\mathbf{P}\{\exists i \text{ t.q. } u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{24}{25} < 1.$$

Donc il existe un choix de $u$ et $v$ (*i.e.* deux étudiant·es) tels que pour toute question, $u[i] = 1$ ou $v[i] = 1$.

*Attention : les étudiant·es sont choisi·es aléatoirement mais leurs réponses ne sont pas nécessairement indépendantes ! Une fois les copies corrigées, on a des informations en plus sur la répartition des notes qui font que ni les réponses de deux étudiant·es à la même question, ni les réponses d'un·e étudiant·e à deux questions, ne sont indépendantes.*

**Exercice 3.** *Union d'intervalles*

Soit $S$ une union d'intervalles inclus dans le segment $[0;1]$. On suppose que la longueur totale de $S$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0,1$.

☞ On tire $x$ uniformément au hasard dans $[0;1]$. On définit *(faire un dessin pour expliquer si nécessaire)* :

$$y = \begin{cases} x + 0,1 & \text{si } \lfloor 10x \rfloor \text{ est pair,} \\ x - 0,1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $y$ est uniformément distribué dans $[0;1]$, mais il n'est pas indépendant de $x$ ; et on a $|x - y| = 0,1$. Par borne de l'union,

$$\mathbf{P}\{x \notin S \text{ ou } y \notin S\} \leq 2(1 - t)$$

où $t$ est la longueur totale de $S$. Or par hypothèse $1 - t < \frac{1}{2}$, donc cette probabilité est strictement inférieure à 1.
On en déduit qu'il existe $x$ et $y$ dans $S$ à distance $0,1$.

**Exercice 4.** *Un problème complexe*

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Rightarrow |P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$.

***Indication :*** *on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$*, où* $Z$ *est choisi uniformément sur le cercle unité.*

☞ On définit $Z$ une variable aléatoire uniforme sur le cercle unité complexe. En utilisant le fait que $|Z| = 1$, on a :

$$|P(Z)|^2 = (Z^2 + aZ + b)\overline{(Z^2 + aZ + b)} = 1 + |a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}(\bar{a}Z) + 2\text{Re}(\bar{b}Z^2) + 2\text{Re}(a\bar{b}Z)$$

Mais l'espérance de chacune des parties réelles est nulle (c'est une variable centrée en zéro quand $Z$ parcourt le cercle unité, on peut aussi le voir en écrivant la définition de l'espérance et des parties réelles avec les sinus). D'où $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1 + |a|^2 + [b|^2$. Mais comme $|P(z)| = 1$ pour tout $z$ (par hypothèse), on sait aussi que $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1$. D'où $a = b = 0$.

**Exercice 5.** *Lemme local de Lovász*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini $F$ telle que :

1. Pour tout $i \in I$, $|A_i| = k$,
2. Pour tout $x \in F$ , $|\{i \in I \mid x \in A_i\}| \leq \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász [2], montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_i \cap F_2 \neq \emptyset\,.$$

**Lemme Local de Lovász** (rappel) : *Soient $n$, $d$ des entiers, $0 \leq p \leq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que :*

1. *pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{P}\{A_i\} \leq p$,*
2. *les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ admettent un graphe de dépendance de degré $\leq d$,*
3. *on a $4dp \leq 1$.*

*Alors on a $\mathbf{P}\left\{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right\} > 0$.*

☞ On partitionne $F$ au hasard en décidant indépendamment et uniformément si chaque $x \in F$ est dans $F_1$ ou $F_2$.
Pour tout $i \in I$, soit $E_i$ l'événement $\{A_i \cap F_1 = \emptyset\} \cup \{A_i \cap F_1 = \emptyset\}$.
Chaque élément $x \in A_i$ appartient à au maximum $\frac{2^k}{k} - 1$ autres $A_j$ par hypothèse 2. Du plus $A_i$ a au maximum $k$ éléments par hypothèse 1, donc finalement $E_i$ est indépendant de tous les autres $E_j$ sauf au plus $\frac{2^k}{8}$ d'entre eux.
On peut alors appliquer le lemme local de Lovász avec :

- $\mathbf{P}\{E_i\} \leq 2 \times \frac{1}{2^k}$ donc $p := \frac{1}{2^{k-1}}$,
- $d := \frac{2^k}{8}$,
- on vérifie qu'on a bien $4dp = 1$.

Et alors $\mathbf{P}\left\{\bigcap_{i \in I} \overline{E_i}\right\} > 0$.

*Remarque : le $k > 6$ vient de la condition 2 où on veut $\frac{2^k}{8k} > 1$ (sinon pour tout $x$, $x$ n'appartient à aucun $A_i$, donc tous les $A_i$ sont vides, contradiction avec la condition 1).*

**Exercice 6.** *Partition de graphe*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé avec $n$ sommets et $m$ arrêtes.
Montrer qu'il existe une partition de $V$ en deux ensembles disjoints $A$ et $B$ telle que au moins la moitié des arrêtes de $G$ relie un sommet de $A$ et un sommet de $B$.

☞ On construit une partition $G = A \uplus B$ au hasard, en choisissant pour chaque sommet $e$ s'il appartient à $A$ ou $B$ uniformément et indépendamment. Pour toute arrête $e_i \in E$ de $G$, on note $X_i$ l'événement « $e_i$ relie $A$ et $B$ ». Alors $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}$, donc $\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{2}$.
Notons $M = \sum_{i=1}^{m} X_i$ la v.a. qui compte le nombre d'arrêtes reliant $A$ et $B$. Son espérance est

$$\mathbf{E}[M] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}[X_i] = \frac{m}{2}\,.$$

Mais on a toujours $\mathbf{P}\{M \geq \mathbf{E}[M]\} > 0$ (et $\mathbf{P}\{M \leq \mathbf{E}[M]\} > 0$), donc en particulier $\mathbf{P}\left\{M \geq \frac{m}{2}\right\} > 0$, d'où le résultat.

2. László Lovász (né en 1948), mathématicien hongrois.