TD 09 – Méthode probabiliste

Exercice 1. *Coloriages*

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le théorème de Mycielski [1] : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon - 1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.
2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand *ensemble indépendant* de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.
3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :
$$\mathbf{P}\left\{\alpha(G) < a\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$
En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.
4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :
$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$
et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

Exercice 2. *Un c'est bien, deux c'est mieux*

Deux cent étudiant·es participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiant·es ont réussi à répondre correctement. Montrer qu'il existe deux étudiant·es qui avaient tout bon à elleux deux (*i.e.* tels que pour chaque question, au moins un·e des étudiant·es a bien répondu).

Exercice 3. *Union d'intervalles*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0;1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0,1$.

Exercice 4. *Un problème complexe*

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Rightarrow |P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$.
Indication : *on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$, *où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*

Exercice 5. *Lemme local de Lovász*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que :

1. Pour tout $i \in I$, $|A_i| = k$,

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

2. Pour tout $x \in F$, $|\{i \in I \mid x \in A_i\}| \leq \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász [2], montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_i \cap F_2 \neq \emptyset\,.$$

Lemme Local de Lovász (rappel) : *Soient n, d des entiers, $0 \leq p \leq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que :*

1. *pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{P}\{A_i\} \leq p$,*
2. *les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ admettent un graphe de dépendance de degré $\leq d$,*
3. *on a $4dp \leq 1$.*

Alors on a $\mathbf{P}\left\{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right\} > 0$.

Exercice 6. *Partition de graphe*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé avec n sommets et m arrêtes.
Montrer qu'il existe une partition de V en deux ensembles disjoints A et B telle que au moins la moitié des arrêtes de G relie un sommet de A et un sommet de B.

2. László Lovász (né en 1948), mathématicien hongrois.