# TD 06 – Inégalité de Chernoff et Graphes aléatoires

**Exercice 1.** *Blackjack*

Vous êtes le croupier dans une partie de blackjack et vous soupçonnez un joueur de tricher en comptant les cartes car, sur les quelques premières mains que vous venez de le voir jouer, il gagne 55% du temps (alors, que, sans tricher, la probabilité de gagner une main est 1/2). Cependant, vous voulez attendre d'avoir un peu plus de certitude avant de démasquer le joueur.

1. On suppose que le joueur continue de gagner 55% du temps. Combien de mains devez-vous le laisser jouer avant d'être sûr à 90% qu'il triche ?

**Exercice 2.** *Random Algorithm*

Suppose you are given a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{A}$ for deciding whether $x \in \{0,1\}^*$ is in the language $L$ or not. Suppose it has the following property. If $x \in L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 0\} \leq 1/4$ and if $x \notin L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 1\} \leq 1/3$. Note that the probability here is taken over the randomness used by the algorithm $\mathcal{A}$ and *not* over the input $x$.

1. Construct a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{B}$ that is allowed to make independent calls to $\mathcal{A}$ such that for all inputs $x \in \{0,1\}^*$, we have $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(x) = \mathbf{1}_{x\in L}\} \geq 1 - 2^{-|x|}$. Here $\mathbf{1}_{x\in L} = 1$ if $x \in L$ and 0 otherwise, and $|x|$ denotes the length of the bitstring $x$.

**Exercice 3.** *Interrupteurs*

**Partie I :**

1. Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ rendant l'énoncé suivant vrai : si une v.a. positive $X$ vérifie $\mathsf{E}[X] = 1$ et $\mathsf{E}[X^2] \leq 3$, alors $\mathsf{P}(X \geq 1/4) \geq \gamma$.
*Indication : définir la variable aléatoire $Y = \mathbf{1}_{X\geq 1/4}$ et se ramener à l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$*

2. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des v.a. i.i.d. vérifiant $\mathsf{P}(X_i = 1) = \mathsf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. Calculer $\mathsf{E}[Y^2]$ et $\mathsf{E}[Y^4]$ et en déduire que
$$\mathsf{E}[|X_1 + \cdots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2}\sqrt{n}.$$

**Partie II :**

On considère une grille $n \times n$ d'ampoules ainsi que 3 séries d'interrupteurs : des interrupteurs $a = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ associés à chaque ampoule, des interrupteurs $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ associés à chaque ligne et des interrupteurs $c = (c_j)_{1\leq j\leq n}$ associés à chaque colonne. Chaque interrupteur prend la valeur $-1$ ou 1. L'ampoule en position $(i, j)$ est allumée si et seulement si $a_{ij}b_ic_j = 1$. On considère la quantité
$$F(a, b, c) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_ic_j$$
qui est le nombre d'ampoules allumées moins le nombre d'ampoules éteintes. Enfin, deux joueurs jouent au jeu suivant : le joueur 1 choisit la position des interrupteurs $(a_{ij})$, puis le joueur 2 choisit la position des interrupteurs $(b_i)$ et $(c_j)$. Le joueur 1 veut minimiser $F(a, b, c)$ et joueur 2 veut le maximiser. On considère donc
$$V(n) = \min_{a\in\{-1,1\}^{n\times n}} \max_{b,c\in\{-1,1\}^n} F(a, b, c).$$

3. Montrer que $V(n) = O(n^{3/2})$ en considérant le cas où le joueur 1 joue au hasard.

4. Le joueur 2 applique la stratégie suivante : il choisit $b$ au hasard, puis ensuite choisit $c$ de façon à allumer le maximum de lampes. Estimer le nombre moyen de lampes allumées par cette stratégie à l'aide de la question I.2 et en déduire que $V(n) = \Omega(n^{3/2})$.

**Exercice 4.** *Graphe Aléatoire Bipartite*

Soit $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit un graphe aléatoire non orienté $H_{2n,p}$ de la manière suivante. On se donne une famille $\{X_{i,j} \,:\, 1 \leq i \leq n,\ n+1 \leq j \leq 2n\}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose alors $H_{2n,p} = (V, E)$, avec $V = \{1, \dots, 2n\}$ et

$$E = \{(i,j) \,:\, X_{i,j} = 1\} \subset \{1, \dots, n\} \times \{n+1, \dots, 2n\}.$$

1. Quelle est la loi du nombre d'arêtes de $H_{2n,p}$ ?
2. Quelle est l'espérance du nombre de sommets isolés de $H_{2n,p}$ ?
3. Dans cette question on pose $p = c\log(n)/n$ pour un nombre réel $c > 0$.
   1. Montrer que si $c > 1$, alors
   $$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) = 0.$$
   2. Montrer que si $c < 1$, alors
   $$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}) = 1.$$
4. Dans cette question on pose $p = 1/2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\text{tous les sommets de } H_{2n,p} \text{ ont un degré inférieur à } \frac{n}{2} + C\sqrt{n\log n}\right) = 1.$$

**Exercice 5.** *K4*

Soit $G$ un graphe aléatoire de loi $G_{n,p}$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il y a un seuil $p_0 := n^{-2/3}$ tel que pour $p = o(p_0)$, le graphe G n'a pas de clique de taille 4 avec bonne probabilité, et que pour $p = \omega(p_0)$, le graphe $G$ a au moins une clique de taille 4 avec bonne probabilité.

**Rappels / définitions :**

— Un graphe aléatoire $G$ suit la loi $G_{n,p}$ s'il a $n$ sommets et que chaque arrête est présente dans $G$ avec probabilité $p$ ;

— une clique de taille 4 est un ensemble de 4 sommets tous reliés deux à deux par des arêtes ;

— $p = o(p_0)$ signifie $\frac{p}{p_0} \to 0$ quand $n \to +\infty$ ;

— $p = \omega(p_0)$ signifie $\frac{p_0}{p} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

1. Pour $p$ quelconque, calculer $\mathbf{E}[X]$, où $X$ est le nombre de cliques du graphe $G$.
2. Soit $p = o(p_0)$, montrer que $\Pr(X \neq 0) \to 0$ quand $n$ tend vers l'infini.

On suppose maintenant $p = \omega(p_0)$, et on veut montrer que $\mathbf{P}\{X = 0\} \to 0$ quand $n$ tend vers l'infini.

3. Montrer que $\mathbf{P}\{X = 0\} \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2}$. Il suffira donc de montrer que $\frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2} \to 0$.
4. Soit $X_i$ des variables aléatoires à valeur dans $0, 1$ (et non indépendantes). Montrer que
$$\mathbf{Var}\left[\sum_i X_i\right] \leq \mathbf{E}\left[\sum_i X_i\right] + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}\left[(X_i - \mathbf{E}[X_i])(X_j - \mathbf{E}[X_j])\right].$$
5. En déduire que $\mathbf{Var}[X] = o(\mathbf{E}[X]^2)$ et conclure.