TD 03 – Variables aléatoires (suite) (corrigé)

Exercice 1. *Rouge et Vert*

1. Supposons que l'on commence avec une urne contenant 2 boules, une rouge et une verte. On répète la procédure suivante jusqu'à ce que l'urne contienne n boules : à chaque étape, on tire une balle uniformément de l'urne, et on la remet ainsi qu'une autre boule de même couleur dans l'urne. Montrer que le nombre de boules rouges à la même probabilité d'être n'importe quel nombre entre 1 et $n-1$.

☞ Soit X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de balles rouges au début de la $(n-1)$ième étape (c'est-à-dire lorsqu'il y a n boules dans la corbeille). Ainsi $\mathbf{P}\{X_2 = 1\} = 1$ puisqu'au début de la première étape, il y a exactement une balle rouge dans la corbeille.

Soit Y_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle tiré à la $(n-1)$ième étape est rouge, et 0 sinon.

Montrons par récurrence sur n que $\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}, \mathbf{P}\{X_n = i\} = \frac{1}{n-1}$.

Pour $i \in \{2,\ldots n-2\}$, on a $X_n = i$ si et seulement l'un des deux cas suivants se présente :
- Il y avait précédemment i balles rouges, et l'on a tiré une boule verte ;
- Il y avait précédemment $i-1$ balles rouges, et l'on a tiré une boule rouge.

Comme ces deux évenements sont disjoints, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n = i\} &= \mathbf{P}\{X_{n-1} = i \text{ et } Y_{n-1} = 0\} + \mathbf{P}\{X_{n-1} = i-1 \text{ et } Y_{n-1} = 1\}\\ &= \mathbf{P}\{Y_{n-1} = 0 \mid X_{n-1} = i\} \cdot \mathbf{P}\{X_{n-1} = i\}\\ &\quad + \mathbf{P}\{Y_{n-1} = 1 \mid X_{n-1} = i-1\} \cdot \mathbf{P}\{X_{n-1} = i-1\}\\ &= \frac{(n-1-i)}{(n-1)} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

De plus, par le même genre d'arguments,

$$\mathbf{P}\{X_n = 1\} = \mathbf{P}\{X_{n-1} = 1 \text{ et } Y_{n-1} = 0\} = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

et

$$\mathbf{P}\{X_n = n-1\} = \mathbf{P}\{X_{n-1} = n-2 \text{ et } Y_{n-1} = 1\} = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

2. On se donne alors une urne avec n boules rouges et $100-n$ boules vertes, où n est choisi uniformément entre 0 et 100. On tire aléatoirement une boule de l'urne, elle est rouge, et on la retire. La prochaine boule tirée aléatoirement a-t-elle plus de chances d'être rouge ou verte ? ☞ On va remplacer 100 par N et traiter le cas général. On écrit r_k l'événement "la k-ième boule tirée est rouge" et b_n l'événement "n boules sont rouges". On souhaite calculer $P(r_2|r_1)$. Tout d'abord, $P(b_n) = \frac{1}{N+1}$, $P(r_1|b_n) = \frac{n}{N}$ et $P(r_1 \cap r_2|b_n) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$. Ensuite, on va calculer $P(r_1)$ et $P(r_1 \cap r_2)$:

$$P(r_1) = \sum_{n=0}^{N} P(r_1|b_n)P(b_n) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{N} = \frac{1}{N(N+1)}\frac{(N+1)N}{2} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$P(r_1 \cap r_2) = \sum_{n=0}^{N} P(r_1 \cap r_2|b_n)P(b_n) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)}{N(N-1)} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Ainsi, $P(r_2|r_1) = \frac{P(r_1 \cap r_2)}{P(r_1)} = \frac{2}{3}$. Il est donc plus probable d'obtenir une autre boule de la même couleur que la première.

Exercice 2. *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On va procéder à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne.

On s'intéresse aux évènements E_i = « la $i$ème boule tirée porte le numéro i».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.

☞ On prend :
- Ω = l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$,
- $\mathcal{A} = P(\Omega)$,
- $\mathbf{P}\{\{\sigma\}\} = 1/n!$ (équipartition).

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

(a) E_i pour $1 \le i \le n$,

(b) $E_i \cap E_j$ pour $1 \le i < j \le n$,

(c) $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$.

☞ E_i arrive lorsqu'on tire la boule i à l'étape i. Or, compter le nombre de permutations de n éléments où $\sigma(i) = i$ revient à compter les permutations de $n-1$ éléments (les $j \neq i$ - on pourrait s'amuser à construire la bijection entre les deux ensembles pour justifier l'égalité).
Ainsi $\mathbf{P}\{E_i\} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Pour $E_i \cap E_j$, on est ramené aux permutations de $n-2$ éléments.
Donc $\mathbf{P}\{E_i \cap E_j\} = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

De même, on arrive à $\mathbf{P}\left\{\bigcap_{i_1<\cdots<i_r} E_{i_j}\right\} = \dfrac{1}{n(n-1)\dots(n-r+1)}$.

3. Calculer la probabilité que l'évènement E_i se produise pour au moins un i.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?
☞ La quantité cherchée est donc $P_n = \mathbf{P}\{\bigcup_{1\leq i\leq n} E_i\}$.

D'après la formule de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}. \end{aligned}$$

On reconnaît presque le développement en série $e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. En fait, on a $P_n - 1 \to -e^{-1}$ donc la limite vaut en fait $1-e^{-1}$.

4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?
☞ Pour placer 8 tours avec aucune en prise, il faut mettre 1 tour par ligne et par colonne. Il suffit donc par exemple de choisir successivement la ligne pour la tour sur la colonne i pour $1 \leq i \leq 8$. C'est un tirage sans remise dans $\{1, 2, \dots, 8\}$, donc il y a $8! = 40320$ possibilités.

Pour le deuxième cas, on est ramené au problème des rencontres pour $n = 8$ (on impose en effet que pour tout i, le $i$ème tirage ne donne pas la ligne i). Donc on a $8!/P_8 = 14833$ possibilités.

Exercice 3. *Inégalité de Jensen*

Soit f une fonction convexe et X une variable aléatoire à valeurs réelles. L'*inégalité de Jensen* assure que

$$\mathbf{E}[f(X)] \geq f(\mathbf{E}[X]) .$$

1. En supposant que f soit $\mathcal{C}^1$, montrer cette inégalité.
☞ Soit $\mu = \mathbf{E}[X]$. Comme f est dérivable et convexe, on sait qu'elle est supérieurs à sa tangente en μ, i.e. $f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu)$ pour tout x du domaine de définition de f.
En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(X)] &\geq \mathbf{E}[f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu)] \\ &= \mathbf{E}[f(\mu)] + f'(\mu)(\mathbf{E}[X] - \mu) \\ &= f(\mu) + 0 && \text{car } \mu = \mathbf{E}[X] \\ &= f(\mathbf{E}[X]). \end{aligned}$$

Exercice 4. *La martingale classique*

On considère une version simplifiée de la roulette où on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Une joueuse gagne le double de sa mise si la balle tombe sur la couleur qu'elle a choisie, elle perd sa mise sinon. Une stratégie de jeu populaire est la suivante : au premier tour, la joueuse mise 1 euro. Tant qu'elle perd, elle double sa mise (elle parie 2^{k-1} euros au k-ième tour).

1. Montrer qu'en suivant cette stratégie, la joueuse finit par gagner 1 euro.
☞ Soit T_n l'événement "le jeu dure au moins n parties". $P(T_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ On peut d'abord montrer que le jeu finit presque surement, i.e. : $P(\bigcap T_n) = \lim_n P(T_n) = 0$ (continuité décroissante). Puis, si le joueur gagne au rang k, son gain est alors de :

$$-\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} + 2^k = 1 \tag{3}$$

2. Maintenant, soit X la variable aléatoire qui mesure la perte maximale avant de gagner. Montrer que $\mathbb{E}[X]$ est non bornée.

☞ Soit W la v.a. qui note le tour gagnant.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(W = k) * (2^{k-1} - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1} - 1}{2^k} \tag{4}$$

3. Maintenant, soit X_j le montant gagné ou perdu lors du tour j (X_j vaut 0 si la joueuse a gagné lors d'un tour précédent.) Calculer $\mathbb{E}[X_j]$, et montrer que, en utilisant la linéarité de l'espérance, l'espérance du gain vaut 0. Est ce que la linéarité de l'espérance tient dans ce cas ?

☞ On a :

$$\mathbb{E}[X_j] = \underbrace{0}_{\text{j'ai déjà gagné}} + \underbrace{\frac{1}{2^j}}_{\text{je gagne au tour } j} \times \underbrace{2^{j-1}}_{\text{gain au tour } j} + \underbrace{\frac{1}{2^j}}_{\text{je continue après le tour } j} \times \underbrace{-2^{j-1}}_{\text{mise perdue au tour } j} = 0 \tag{5}$$

Soit G le gain.

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[\sum_1^{\infty} X_j] \underbrace{=}_{\text{si linéarité}} 0 \tag{6}$$

Or, l'espérance du gain vaut 1 comme vu à la question 1. Pas de linéarité de l'espérance, car $\mathbb{E}[\sum^{\infty} |X_j|]$ ne converge pas.

Exercice 5. *Debiaiser des bits*

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, mais que vous ne connaissiez pas la valeur de $p \in]0,1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0,1\}$.

☞ L'algorithme naturel est de produire des paires de bits jusqu'à obtenir une paire de bits distincts, et de retourner 0 ou 1 selon que la paire ainsi produite est 01 ou 10. Le nombre de paires de bits générées est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $q := 2p(1-p)$, en particulier il est fini (et l'algorithme termine) presque sûrement.

2. On souhaite maintenant produire n bits indépendants de loi uniforme sur $\{0,1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de t telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de tn fois soit inférieure à $\frac{1}{100}$ pour n assez grand. *Évidemment, plus t est petit, mieux c'est.*

☞ Si on répète l'algorithme précédent, le nombre d'utilisations N de la machine suit la loi de

$$2(X_1 + \cdots + X_n)$$

où les variables aléatoires (X_i) sont i.i.d. de loi géométrique de paramètre q. Vous êtes nombreux à avoir majoré $\mathrm{P}(N \geq t)$ par l'inégalité de Markov. C'est correct, mais donne un résultat mauvais : on a $\mathrm{P}(N \geq tn) \leq \frac{1}{tp(1-p)}$ ce qui nécessite $t = \frac{100}{p(1-p)}$. Cela peut être amélioré en utilisant l'inégalité de Tchebychev : en effet $\mathbf{E}N = \frac{n}{p(1-p)}$ et $\mathbf{Var}[N] = O(n)$ (peu importe la constante exacte, il suffit de dire qu'une v.a. géométrique a une variance finie), donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{P}(N \geq (1+\varepsilon)\mathbf{E}N) \leq \frac{\mathbf{Var}[N]}{\varepsilon^2(\mathbf{E}N)^2} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n}\right).$$

En particulier, tout réel $t > \frac{1}{p(1-p)}$ convient, une amélioration d'un facteur 100...

Le rendement peut être amélioré car l'algorithme de la question 1 gaspille beaucoup de bits sans en extraire d'information. Par exemple, on peut regarder si les paires de (paires de bits identiques) que l'on a jetées sont identiques ou pas, et déclarer que l'on arrête l'algorithme lorsqu'elles sont différentes, en retournant 0 ou 1 selon la situation 00 11 ou 11 00. Cela se prête naturellement à une formulation récursive, que vous trouverez expliquée ici `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_process#Randomness_extraction`. On peut montrer que tout $t > 1/h(p)$ convient, où $h(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ est la fonction d'entropie binaire, et que cette borne est optimale. Il est remarquable que pour p proche de 1/2, le rendement obtenu est proche de 1 !

Exercice 6. *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme déterministe qui prend en entrée une chaîne de n bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

☞ Le but ici est d'utiliser l'inégalité de Markov. Soit X le temps d'exécution de l'algorithme.

$$\mathbf{P}\left\{X \geq n^2 \cdot f(n)\right\} \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{n^2 \cdot f(n)} \leq \frac{c \cdot n^2}{n^2 \cdot f(n)} \leq \frac{c}{f(n)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0\,.$$

2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas ?

☞ Pour avoir une borne supérieure sur le temps dans le pire cas, on utilise le fait que les entrées sont distribuées uniformément. Comme chaque entrée est choisie avec probabilité $1/2^n$, on a que si $\mathbf{P}\{X \geq t\}$ est non nulle, elle doit être au moins égale à $1/2^n$ (car au moins une entrée donnera un temps de calcul supérieur à t). On a vu à la question précédente que

$$\mathbf{P}\left\{X \geq n^2 \cdot f(n)\right\} \leq \frac{c}{f(n)}.$$

Pour que cette quantité soit inférieure à $1/2^n$, il faut que $f(n) \geq c2^n$. On en déduit que le temps d'exécution dans le pire cas est borné par $cn^2 2^n = O(n^2 2^n)$.

Exercice 7. *Aiguille de Buffon*

Considérons l'expérience[1] consistant à jeter une aiguille de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur l.

Dans un premier temps, on suppose $a < l$ et on va s'intéresser à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches.

1. Proposer une modélisation pour ce problème.

☞ Faire discuter les étudiants et se mettre d'accord sur l'introduction des deux quantités suivantes :

1. la distance r du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche,
2. l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ formé par l'aiguille et l'une des rainures (prendre l'angle géométrique : on se fiche du signe et des demi-tours que l'aiguille a effectuée durant sa chute).

Alors, r suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, l/2])$ et θ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, \pi/2])$.

2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.

☞

FAIRE UN DESSIN.

L'aiguille repose sur deux planches lorsque $r < \frac{a}{2}\cos\theta$. Ainsi, la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{r<\frac{a}{2}\cos\theta}\, dF_r\, dF_\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{r<\frac{a}{2}\cos\theta}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\frac{a}{2} = \frac{2a}{\pi l}.
\end{aligned}$$

3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?

☞ Cette fois, il est plus simple de calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur exactement une planche. Déjà, il faut que $a\cos\theta < l$ sinon la "largeur" de l'aiguille est plus grande que la largeur d'une planche. Ensuite, il faut que $\frac{a}{2}\cos\theta < r$ pour que l'aiguille soit bien sur une seule planche.

FAIRE UN DESSIN.

Ainsi, la probabilité cherchée vérifie :

$$\begin{aligned}
1-p &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{\frac{a}{2}\cos\theta<r \text{ et } a\cos\theta<l}\, dF_r\, dF_\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{\frac{a}{2}\cos\theta<r \text{ et } a\cos\theta<l}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_{\arccos\frac{l}{a}}^{\pi/2} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\cos\theta\right) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi l}\int_{\arccos\frac{l}{a}}^{\pi/2} (l - a\cos\theta)\, d\theta \\
&= \frac{2}{\pi l}\left(\left(\frac{\pi l}{2} - a\right) - \left(l\arccos\frac{l}{a} - a\sin\arccos\frac{l}{a}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{2a}{\pi l}\left(1 + \frac{l}{a}\arccos\frac{l}{a} - \sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$p = \frac{2a}{\pi l}\left(1 + \frac{l}{a}\arccos\frac{l}{a} - \sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}\right).$$

[1] proposée par Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788), scientifique et écrivain français.

Si $a = l$, on retrouve $p = \frac{2}{\pi}$ comme à la question précédente. Si $a >> l$, alors on a $u = \frac{l}{a} << 1$, et un développement limité donne :

$$p \approx \frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\left(1 + u(\frac{\pi}{2} - u) - (1 - \frac{1}{2}u^2) + o(u^2)\right) = 1 - \frac{u}{\pi} = 1 - \frac{l}{\pi a}.$$

4. Maintenant qu'on a jeté les aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter les ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet.
Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle.
Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits segments.
☞
L'idée dans le cas de la ficelle est d'approcher la courbe obtenue suite au lancé par une courbe affine par morceaux, avec des morceaux de même longueur $\varepsilon \to 0$. Chaque morceau peut alors être vu comme une aiguille de taille ε.
On associe à chaque morceau la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le morceau touche deux planches, et 0 sinon (on néglige le cas où un morceau est pile sur une rainure car la probabilité d'un tel événement est nulle). La linéarité de l'espérance nous dit alors que :

$$E_a = \mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_N] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_N].$$

De là :
— soit on en déduit la linéarité de E_* ($E_{a+b} = E_a + E_b$ puis $E_a = K \cdot a$) et on se sert du cas de l'aiguille courte ($a < l$) ou du cercle pour conclure que $K = \frac{2}{\pi l}$. Pour le cercle, si on regarde ce qui se passe pour un cercle de rayon $\rho = \frac{l}{2}$, alors la ficelle est de longueur $a = \pi l$ et quelle que soit sa position dans l'espace, elle va avoir 2 intersections avec les rainures du parquet. D'où $2 = K \cdot \pi l$ et $K = \frac{2}{\pi l}$.
— soit on constate que comme $\varepsilon \to 0$, les X_i correspondent au cas de l'aiguille courte de taille ε pour laquelle on a 0 intersection avec probabilité $1 - \frac{2\varepsilon}{\pi l}$ et 1 intersection avec probabilité $\frac{2\varepsilon}{\pi l}$. Donc $\mathbf{E}[X_i] = \frac{2\varepsilon}{\pi l}$ et en sommant on retrouve $E_a = N \cdot \frac{2\varepsilon}{\pi l} = \frac{2a}{\pi l}$.

Conclusion : $E_a = \dfrac{2a}{\pi l}$.

Exercice 8. *Aiguille de Buffon (le retour)*

On se place dans le même cadre que l'exercice précédent, dernière question : on considère l'expérience consistant à jeter une ficelle de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur ℓ.
L'objectif de cet exercice est de calculer le nombre moyen de points d'intersections entre la ficelle et les rainures du parquet, en utilisant juste la linéarité de l'espérance (sans trigonométrie).

1. Soit X la variable aléatoire représentant de nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet. Montrer que

$$\mathbf{E}[X] = c \cdot a,$$

pour une certaine constante c que l'on ne demande pas de calculer. *Indice : on pourra décomposer la ficelle en petite tronçons de longueur $\varepsilon < \ell$, que l'on approximera par des segments.*
☞ On utilise l'indice et on décompose la ficelle en a/ε tronçons, de longueur ε (on choisit $\varepsilon < \ell$ et tel que a/ε soit un entier).On prend ε suffisament petit pour que chaque tronçon ressemble à peu près à une droite, et comme $\varepsilon < \ell$, chaque petit tronçon ne peut rencontrer une rainure qu'au plus une fois. On note X_i la variable aléatoire valant 1 si le bout i tombe à cheval sur une rainure et 0 sinon (on a vu qu'il n'y a pas d'autres choix possibles). On a alors $X = \sum_i X_i$. De plus, les X_i suivent tous la même loi (chaque bout de corde à la même probabilité de tomber à un endroit donner). On a donc, pour tout i, $\mathbf{E}[X_i] = p_\varepsilon$ pour une certaine constante $0 \leq p_\varepsilon \leq 1$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit

$$\mathbf{E}[X] = \sum_i \mathbf{E}[X_i] = p_\varepsilon \cdot a/\varepsilon = (p_\varepsilon/\varepsilon) \cdot a.$$

La constante de linéarité est donc $c = (p_\varepsilon/\varepsilon)$, qui ne dépend pas de a (à part pour le fait que ε est choisit tel que a/ε soit entier, mais si ε est suffisamment petit ça ne doit pas poser de problème).

2. Trouver une forme qui, où qu'elle soit lancée, aura toujours le même nombre d'intersections avec les rainures du plancher. En déduire la constante c.
☞ Un cercle de diamètre ℓ aura toujours 2 intersections avec les rainures du plancher. Même si on conditionne X par l'événement "la ficelle tombe en formant un cercle", on voit, en utilisant le même raisonnement que dans l'exercice précédent que l'espérance du nombre de points d'intersections est toujours $c \cdot a$. Pour le cas du cercle de diamètre ℓ, on a $a = \pi\ell$, et $\mathbf{E}[X] = 2$. D'où $c = \frac{2}{\pi\ell}$.