TD 03 – Variables aléatoires (suite)

Exercice 1. *Rouge et Vert*

1. Supposons que l'on commence avec une urne contenant 2 boules, une rouge et une verte. On répète la procédure suivante jusqu'à ce que l'urne contienne n boules : à chaque étape, on tire une balle uniformément de l'urne, et on la remet ainsi qu'une autre boule de même couleur dans l'urne. Montrer que le nombre de boules rouges à la même probabilité d'être n'importe quel nombre entre 1 et $n-1$.

2. On se donne alors une urne avec n boules rouges et $100-n$ boules vertes, où n est choisi uniformément entre 0 et 100. On tire aléatoirement une boule de l'urne, elle est rouge, et on la retire. La prochaine boule tirée aléatoirement a-t-elle plus de chances d'être rouge ou verte ?

Exercice 2. *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On va procéder à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne.
On s'intéresse aux évènements $E_i =$ « la $i$ème boule tirée porte le numéro i».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   (a) E_i pour $1 \leq i \leq n$,
   (b) $E_i \cap E_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$,
   (c) $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

3. Calculer la probabilité que l'évènement E_i se produise pour au moins un i.
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?

Exercice 3. *Inégalité de Jensen*

Soit f une fonction convexe et X une variable aléatoire à valeurs réelles. L'*inégalité de Jensen* assure que

$$\mathbf{E}\left[f(X)\right] \geq f(\mathbf{E}\left[X\right]) .$$

1. En supposant que f soit $\mathcal{C}^1$, montrer cette inégalité.

Exercice 4. *La martingale classique*

On considère une version simplifiée de la roulette où on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Une joueuse gagne le double de sa mise si la balle tombe sur la couleur qu'elle a choisie, elle perd sa mise sinon. Une stratégie de jeu populaire est la suivante : au premier tour, la joueuse mise 1 euro. Tant qu'elle perd, elle double sa mise (elle parie 2^{k-1} euros au k-ième tour).

1. Montrer qu'en suivant cette stratégie, la joueuse finit par gagner 1 euro.

2. Maintenant, soit X la variable aléatoire qui mesure la perte maximale avant de gagner. Montrer que $\mathbb{E}[X]$ est non bornée.

3. Maintenant, soit X_j le montant gagné ou perdu lors du tour j (X_j vaut 0 si la joueuse a gagné lors d'un tour précédent.) Calculer $\mathbb{E}[X_j]$, et montrer que, en utilisant la linéarité de l'espérance, l'espérance du gain vaut 0. Est ce que la linéarité de l'espérance tient dans ce cas ?

Exercice 5. *Debiaiser des bits*

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, mais que vous ne connaissiez pas la valeur de $p \in]0,1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0,1\}$.
2. On souhaite maintenant produire n bits indépendants de loi uniforme sur $\{0,1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de t telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de tn fois soit inférieure à $\frac{1}{100}$ pour n assez grand. *Évidemment, plus t est petit, mieux c'est.*

Exercice 6. *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme déterministe qui prend en entrée une chaîne de n bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas ?

Exercice 7. *Aiguille de Buffon*

Considérons l'expérience[1] consistant à jeter une aiguille de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur l.

Dans un premier temps, on suppose $a < l$ et on va s'intéresser à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches.

1. Proposer une modélisation pour ce problème.
2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.
3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?
4. Maintenant qu'on a jeté les aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter les ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet.
   Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle. *Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits segments.*

Exercice 8. *Aiguille de Buffon (le retour)*

On se place dans le même cadre que l'exercice précédent, dernière question : on considère l'expérience consistant à jeter une ficelle de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur ℓ.

L'objectif de cet exercice est de calculer le nombre moyen de points d'intersections entre la ficelle et les rainures du parquet, en utilisant juste la linéarité de l'espérance (sans trigonométrie).

1. Soit X la variable aléatoire représentant de nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet. Montrer que
$$\mathbf{E}[X] = c \cdot a,$$
   pour une certaine constante c que l'on ne demande pas de calculer. *Indice : on pourra décomposer la ficelle en petite tronçons de longueur $\varepsilon < \ell$, que l'on approximera par des segments.*
2. Trouver une forme qui, où qu'elle soit lancée, aura toujours le même nombre d'intersections avec les rainures du plancher. En déduire la constante c.

1. proposée par Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788), scientifique et écrivain français.