
TD 01 – Évènements

Exercice 1.*Compléments des indépendants*

1. Montrer qu'une famille d'évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante si et seulement si la famille des compléments $(\overline{A_i})_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante. *Indice : On pourra commencer par montrer que la famille $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est indépendante ssi la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante.*

Exercice 2.*Borne inf sur l'univers*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilités. On suppose qu'il existe n évènements A_1, \dots, A_n mutuellement indépendants tels que $\mathbf{P}\{A_i\} \notin \{0, 1\}$ pour tout i .

1. Montrer que $\text{Card}(\Omega) \geq 2^n$. *Indice : On pourra considérer les évènements $A_1^{b_1} \cap A_2^{b_2} \cap \dots \cap A_n^{b_n}$ où $A_i^1 = A_i$ et $A_i^0 = \overline{A_i}$.*

Exercice 3.*Magnets indépendants*

Deux colocataires, Charlie et Diane, achètent indépendamment une boîte de céréales proposant en cadeau un magnet d'un département français. Cette semaine, la région mise à l'honneur est la Corse, chaque boîte de céréales contient donc au choix le magnet Corse-du-Sud (2A) ou Haute-Corse (2B). Charlie et Diane espèrent avoir deux départements différents pour compléter la carte de France sur leur frigo.

On va considérer les trois évènements suivants :

- A Charlie obtient le magnet Corse-du-Sud,
- B Diane obtient le magnet Corse-du-Sud,
- C les deux magnets sont identiques.

1. Montrez que ces trois évènements sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.
2. Jusqu'ici, nous avons supposé que la probabilité d'avoir le département 2A et celle d'avoir le département 2B étaient égales à $1/2$. En notant p la probabilité d'avoir le département 2A (celle d'avoir le département 2B est alors $1 - p$), trouvez les valeurs de p pour lesquelles les évènements A et C sont indépendants.
3. De façon plus générale, proposer un exemple de n évènements A_1, \dots, A_n tels que pour tout $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, on ait $\mathbf{P}\{\bigcap_{i \in I} A_i\} = \prod_{i \in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ mais qui ne soient pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}\{\bigcap_{i=1}^n A_i\} \neq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\}$).
4. Quel lien y a-t-il entre "être indépendants 2 à 2" et "être indépendants mutuellement" ?

Exercice 4.*Générer une loi uniforme*

1. Définir une variable aléatoire ayant une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ à partir d'une suite infinie de bits aléatoires. Est-ce possible à partir d'une suite finie ?

Exercice 5.*Monty Hall*

Monty est le présentateur d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture. Appelons le rideau que Bob choisit le rideau 1.

Ensuite, Monty ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (s'il y a une chèvre derrière les 2 autres rideaux, Monty en choisit un uniformément au hasard). Supposons que le rideau que Monty ouvre est le rideau 2. Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Monty ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

1. Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? (on suppose bien évidemment que Bob préfère gagner la voiture plutôt qu'une chèvre....!)

Exercice 6.

Météo

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques qui se trompent de façon indépendante (la météo nationale n'utilise pas de grenouilles) :

- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100,
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

1. La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminez le temps le plus probable.

Exercice 7.

Formule de Poincaré

On se donne une suite d'évènements A_1, A_2, \dots, A_n .

1. Démontrez la formule suivante, due à Poincaré :

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \right\} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq k} A_{i_j} \right\}.$$

Exercice 8.

Collisions

On considère une fonction de hachage qui, étant donné un fichier, produit une empreinte sous la forme d'une chaîne de 128 bits. On souhaite trouver une collision (c'est-à-dire deux fichiers différents ayant même empreinte) en hachant des fichiers générés aléatoirement.

1. Combien de fichiers faut-il générer pour que la probabilité d'observer une collision soit supérieure à 1/2?

Ce problème est aussi connu sous le nom de *paradoxe des anniversaires*.

2. Considérons un groupe de personnes. En supposant que les jours de naissance sont équiprobables (et qu'aucune personne n'est née un 29 février), à partir de combien de personnes la probabilité d'avoir deux personnes avec le même anniversaire dépasse-t-elle 1/2?
3. Quelle est la probabilité pour que deux personnes actuellement dans la pièce partagent la même date d'anniversaire (toujours sous les hypothèses d'équiprobabilité et en négligeant le 29 février)?
4. Quelle est la probabilité pour qu'une personne actuellement dans la pièce partage la même date d'anniversaire que vous?

Exercice 9.

Jouons au poker!

Comptez les probabilités des combinaisons de cartes au poker (première disposition sans joker).

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, formé de 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) contenant chacune 13 figures (2, 3, .., 10, valet, dame, roi, as). L'as est la carte la plus forte mais il peut parfois être considéré comme la plus faible (Quinte et quinte flush).

Les combinaisons que l'on peut faire au poker sont :

- La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes une double paire, un full ou un carré.
- La double paire : 2 séries différentes de deux cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes un full.
- Le brelan : trois cartes de la même valeur mais qui ne forment pas avec les autres cartes un carré ou un full.
- La quinte ou suite : 5 cartes consécutives de différentes couleurs.

- La couleur ou flush : 5 cartes de la même couleur.
- Le full : Trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de même valeur d'autre part.
- Le carré : 4 cartes de la même valeur.
- La quinte flush : 5 cartes consécutives d'une même couleur.