TD 02 – Variables Aléatoires

Exercice 1. *Independence*

Pour des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on rappelle que l'indépendance est définie par

$$\mathbf{P}\{X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n\} = \mathbf{P}\{X_1 \le t_1\} \cdots \mathbf{P}\{X_n \le t_n\} \tag{1}$$

pour tout $t_1, \dots, t_n$ réels.

1. Montrer que dans le cas où les X_i sont toutes des variables aléatoires discrètes [1] à valeur dans un ensemble dénombrable C, alors la définition est équivalente à

$$\mathbf{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{X_i = x_i\} \ . \tag{2}$$

pour tout $x_1, \dots, x_n$ dans C.

Exercice 2. *Independent Rademacher*

Soient X, Y, Z des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. XY et Z sont indépendantes.
2. XY et YZ sont indépendantes.
3. X, Y et XY sont indépendantes.

Exercice 3. *Inclusion*

Soit X et Y indépendantes de loi uniforme sur $P(\{1, \dots, n\})$, l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\{X \subseteq Y\}$.
2. Calculer $\mathbf{P}\{X \cup Y = \{1, \dots, n\}\}$.

Exercice 4. *Répétitions dans une suite de bits aléatoires*

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Une répétition est un sous-mot de $X_1X_2 \cdots X_n$ du type $00 \cdots 0$ ou $11 \cdots 1$. Ainsi la suite 00011001 contient 4 répétitions de longueur 2.

1. Pour $p > 1$ fixé, quelle est l'espérance du nombre de répétitions de longueur p ? Montrez que pour $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$, cette espérance est de l'ordre de 1.
2. Montrez que pour $p \le 0.99 \log_2 n$, la probabilité d'obtenir au moins une répétition de longueur p tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 5. *StagiairesL3*

Bob veut recruter un stagiaire L3 parmi n candidats, et bien sûr il veut recruter le meilleur. Les candidats se présentent un par un pour l'interview, dans un ordre aléatoire. Quand il interviewe un candidat, Bob lui donne un score (pas d'ex-aequo). La règle du jeu de l'ENS de Lyon est la suivante : après avoir interviewé un candidat, soit on l'embauche, soit on perd toute chance de l'embaucher.
Malin, Bob utilise la stratégie suivante : d'abord, interviewer m candidats, et les rejeter tous ; puis après le m-ème candidat, embaucher le premier candidat interviewé qui est meilleur (plus gros score) que tous ceux déjà interviewés.

1. 'discrete' means that there is some $\varepsilon > 0$ such that all points of C are at distance at least ε.

1. Montrer que la probabilité que Bob choisisse le meilleur candidat est

$$P(n,m) = \frac{m}{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j-1}$$

2. En déduire que $\lim_n \max_m P(n,m) \geq 1/e$.

Exercice 6. *Rouge et Vert*

1. Supposons que l'on commence avec une urne contenant deux boules, une rouge et une verte. On répète la procédure suivante jusqu'à ce que l'urne contienne n boules. À chaque étape, on tire une balle uniformément de l'urne, et on la remet ainsi qu'une autre boule de même couleur dans l'urne. Montrer que le nombre de boules rouges a la même probabilité d'être n'importe quel nombre entre 1 et $n-1$.
2. On se donne alors une urne avec n boules rouges et $100-n$ boules vertes, où n choisit uniformément entre 0 et 100. On tire aléatoirement une boule de l'urne, elle est rouge, et on la retire. La prochaine boule tirée aléatoirement a-t-elle plus de chance d'être rouge ou d'être verte ?

Exercice 7. *Aiguille de Buffon*

Aiguille de Buffon [2]
Considérons l'expérience consistant à jeter une aiguille de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur l.
Dans un premier temps, on suppose $a < l$ et on va s'intéresser à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches.

1. Proposer une modélisation pour ce problème.
2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.
3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?
4. Maintenant qu'on a jeté les aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter les ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet.
   Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle.
   Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits segments.

Exercice 8. *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On va alors procéder à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne.
On s'intéresse aux évènements $E_i =$ « la $i$ème boule tirée porte le numéro i».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants : E_i, $E_i \cap E_j$ pour $i < j$, et enfin $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.
3. Calculer la probabilité que l'évènement E_i se produise pour au moins un i. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.
4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?

2. Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788), scientifique et écrivain français.