TD 01 – Évènements

Exercice 1. *Compléments des indépendants*

1. Montrer qu'une famille d'événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante si et seulement si la famille des compléments $(\overline{A_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante. *Indice : On pourra commencer par montrer que la famille $\{\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n\}$ est indépendante ssi la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est indépendante.*

Exercice 2. *Borne inf sur l'univers*

Soit $(\Omega, F, \mathbf{P}\{\})$ un espace de probabilités. On suppose qu'il existe n événements $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants tels que $\mathbf{P}\{A_i\} \notin \{0,1\}$ pour tout i.

1. Montrer que $\mathrm{Card}(\Omega) \geq 2^n$. *Indice : On pourra considérer les événements $A_1^{b_1} \cap A_2^{b_2} \cap \cdots \cap A_n^{b_n}$ où $A_i^1 = A_i$ et $A_i^0 = \overline{A_i}$.*

Exercice 3. *Géopolitique des indépendants*

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon.

On va considérer les trois évènements suivants :

A	l'héritier d'Aquitaine est un garçon,
B	l'héritier de Bourgogne est un garçon,
C	les deux sont de même sexe.

1. Montrez que ces trois évènements suivants sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.
2. Jusqu'ici, nous avons supposé que la probabilité d'avoir un garçon et celle d'avoir une fille étaient égales à $1/2$. En notant p la probabilité d'avoir un garçon (celle d'avoir une fille est alors $1-p$), trouvez les valeurs de p pour lesquelles les évènements A et C sont indépendants.
3. De façon plus générale, proposer un exemple de n événements $A_1, \dots, A_n$ tels que pour tout $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, on ait $\mathbf{P}\{\cap_{i\in I} A_i\} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ mais qui ne soient pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^n A_i\} \neq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\}$).
4. Quel lien y a-t-il entre "être indépendants 2 à 2" et "être indépendants mutuellement" ?

Exercice 4. *Générer une loi uniforme*

1. Définir une variable aléatoire ayant une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ à partir d'une suite infinie de bits aléatoires. Est-ce possible à partir d'une suite finie ?

Exercice 5. *Monty Hall*

Monty est le présentateur d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture. Appelons le rideau que Bob choisi le rideau 1.

Ensuite, Monty ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (s'il y a une chèvre derrière les 2 autres rideaux, Monty en choisit un uniformément au hasard). Supposons que le rideau que Monty ouvre est le rideau 2. Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Monty ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

1. Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? (on suppose bien évidemment que Bob préfère gagner la voiture plutôt qu'une chèvre.... !)

Exercice 6. *Météo*

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques qui se trompent de façon indépendante (la météo nationale n'utilise pas de grenouilles) :

— la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100,
— une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

1. La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminez le temps le plus probable.

Exercice 7. *Formule de Poincaré*

On se donne une suite d'évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Démontrez la formule suivante, due à Poincaré :

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\}.$$

Exercice 8. *Jouons au poker !*

Comptez les probabilités des combinaisons de cartes au poker (première disposition sans joker).

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, formé de 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) contenant chacune 13 figures (2, 3,. . ., 10, valet, dame, roi, as). L'as est la carte la plus forte mais il peut parfois être considéré comme la plus faible (Quinte et quinte flush).

Les combinaisons que l'on peut faire au poker sont :

— La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes une double paire, un full ou un carré.
— La double paire : 2 séries différentes de deux cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes un full.
— Le brelan : trois cartes de la même valeur mais qui ne forment pas avec les autres cartes un carré ou un full.
— La quinte ou suite : 5 cartes consécutives de différentes couleurs.
— La couleur ou flush : 5 cartes de la même couleur.
— Le full : Trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de même valeur d'autre part.
— Le carré : 4 cartes de la même valeur.
— La quinte flush : 5 cartes consécutives d'une même couleur.