TD 09 – Méthode probabiliste

Exercice 1. *Théorème de Mycielski*

Recall that the *chromatic number* $\chi(G)$ is the smallest number of colors needed to color the vertices of G such that any two adjacent vertices have different colors. Clearly, graphs with large cliques have a high chromatic number, but the opposite is not true. The goal of this exercise is th prove Mycielski's theorem, which states that for any integer $k \geq 2$, there exists a graph G such that G contains no triangles and $\chi(G) \geq k$.

1. Fix $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ and let G be a random graph on n vertices where each edge appears independently with probability $p = n^{\varepsilon - 1}$. Show that when n tends to infinity, the probability that G has more than $n/2$ triangles tends to 0.
2. Let $\alpha(G)$ be the size of the largest *independent set* of G (A set of vertices X is *independent* if there is no edge between any two vertices of X in G). Show that $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.
3. Let $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Show that when n tends to infinity,
$$\mathbb{P}(\alpha(G) < a) \to 1.$$
Deduce that there exists n and G of size n such that G has at most $n/2$ triangles and $\alpha(G) < a$.
4. Let G be such a graph. Let G' be a graph obtained from G by removing a minimum number of of vertices so that G' does not contain any triangle. Show that
$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$
and conclude the proof of Mycielski's Theorem.

Exercice 2. *Test*

Deux cent étudiants participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiants ont réussi à répondre correctement à la question. Montrer qu'il existe deux étudiants qui avaient tout bon à eux deux (i.e. tels que pour chaque question, au moins un des étudiants a bien répondu).

Exercice 3. *Intervalle*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0, 1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $1/2$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0.1$.

Exercice 4. *Polynome*

Soit $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on ait $|P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$. *Indice : on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$, *où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*

Exercice 5. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{card}\{i \in I : x \in A_i\} \leq \frac{2^k}{8k}$

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Exercice 6. *LargeCut*

Given an undirected graph G with n vertices and m edges. Prove that there is a partition of V into two disjoint sets A and B such that at least $m/2$ edges connect a vertex in A to a vertex in B.